# 複数テストフォームの構成

加藤健太郎 ベネッセ教育総合研究所 アセスメント研究開発室

日本テスト学会ワークショップ 『項目反応理論を用いたテスト運用の実際』 2014/12/21

#### 本発表の話題

- テスト構成について
  - 自動テスト構成の概要
  - 複数フォームの構成法
- ・ごくごく簡単な計算例
  - 線形計画法を用いた複数フォームの構成
  - 逐次構成, 同時構成, BSTの比較

# テスト構成とは?

## テスト構成(test assembly)

- 項目プールから、テスト仕様に適合するように、テストに出題する項目を選定する作業
  - つまり,「フォーム(テスト冊子)」を作ること
  - 項目プールからの「アウトプット」の部分
- テスト仕様・・・各フォームが満たしているべき条件のリスト
  - (領域ごと/全体の)項目数
  - 解答時間
  - 難易度
  - 測定精度•判定精度
  - • •
- 前提・・・適切な項目プール(項目データベース)があること
  - 選定候補となる項目がすべて共通尺度に乗っている(等化済みである)
  - 選定候補となる項目に、テスト仕様に対応した<u>属性</u>がついている(項目パラメタ、領域、解答時間、etc.)
  - 候補項目は, 事前の利用計画にもとづいて選定されている

#### 自動テスト構成

## (automatic test assembly: ATA)

- 数値的最適化によるテスト構成
  - テスト構成は様々な条件や計算を含む複雑な作業→自動化
  - 客観的な基準に照らして、構成されたテストの出来栄えを評価できる
  - 各手法については後述

#### 複数フォームの構成

- IRTを利用したテストにおいて、単一のフォームを使い 続けることはほぼあり得ない(IRTを使う意味がない!)
  - 等質なフォーム
  - 異なる受験対象や目的に対応したフォーム
- 構成作業はより複雑に
  - 項目プール中の項目全体の効率的な配置
  - 「手作業」はさらに困難→ATAが絶大な力を発揮

#### 複数テストの構成(線形計画法)

- van der Linden (2005, chap. 6)
- 逐次構成(sequential construction)
  - その都度ベストな組み合わせ→後になるほどエラー(目標値とのズレ)が増大
- 同時構成(simultaneous construction)
  - 項目プールのサイズand/or構成するフォーム数が大きくなると、計算コストが増大
- Big Shadow Test (BST)
  - 計算コストと性能のバランスを考えるとgoodな選択
  - フォーム間での項目の重複を扱うのが困難

#### 複数テストの構成(より高度な方法)

- 大量の等質テストの同時構成
  - エラーの均一化・最小化←→計算量とのトレードオフ
  - 項目プールから抽出するフォーム数の最大化(理論的な裏付け)
  - フォーム間での項目の重複
- Belov & Armstrong (2006)
  - 最大集合充填アルゴリズム
- Sun, et al. (2008)
  - 遺伝的アルゴリズム
- Songmuang & Ueno (2011)
  - Beesアルゴリズム(ランダムサーチ法&並列計算)
- Ishii, Songmuang, & Ueno (2014)
  - 最大クリーク抽出アルゴリズム(+ランダムサーチ)

# 計算例

# 項目プール

- 2パラメタ・ロジスティックモデル
- ・現実の項目

項目数(J)	識別力( <i>a</i> )			困難度( <i>b</i> )		
	1Q	Med	3Q	1Q	Med	3Q
50	0.63	0.86	1.10	-0.96	-0.34	0.70

## テスト仕様

- 個々のフォームについて
  - 項目数=10
  - 目標テスト情報量(TIF)を指定
  - 他の制約はつけない
- フォーム間で
  - TIFに関して<u>等質</u>な4つのフォームを作る
  - 項目の重複は<u>認めない</u>

#### 線形計画法

## (linear programming: LP)

- 線形計画問題(LP problem)
   「Ax=b, I≤b≤u, I<sub>x</sub>≤x≤u<sub>x</sub>という条件の下で, z=c<sup>T</sup>x を最大化(最小化)する。
  - x:決定変数
  - A, b, I, u, I<sub>x</sub>, u<sub>x</sub>:制約条件(所与)
  - z:目的関数(係数cは所与)
- 整数計画法(integer programming: IP) 「組み合わせ最適化」
   xの要素がすべて整数 の問題
- 0-1整数計画法(0-1 integer programming)
  - xの要素がすべて0または1の二値
- 混合整数計画法(mixed integer programming: MIP)
  - xの要素に整数と実数が混在
- 参考書: 茨木・福島(1993, 1~3章)など

#### 線形計画法

- ATAでは、主に0-1整数計画問題または混合整数計画問題を扱う
- 0-1整数計画問題
  - $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ ... \ x_J]^T, \ x_j = 0, 1$
  - 項目jがフォームに含まれる場合は $x_j$ =1, そうでなければ $x_j$ =0
  - Jは項目プールのサイズ
  - 参考書:加藤•山田•川端(2014, 15章)
- 混合整数計画問題
  - $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_J \ y]^T, \ x_j = 0, 1, \ y \ge 0$
  - 項目jがフォームに含まれる場合は $x_j$ =1, そうでなければ $x_j$ =0
  - yはエラーの量(後述)

#### テスト仕様のモデル化

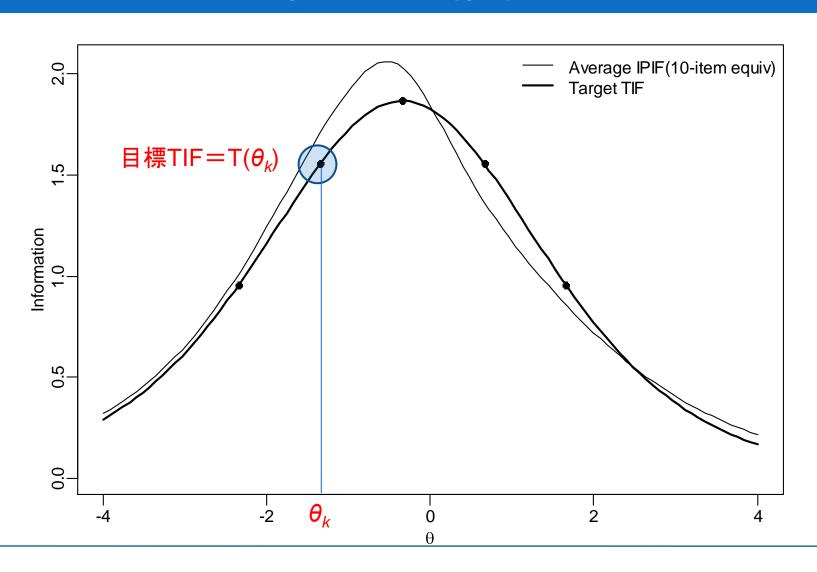
- テスト仕様を、線形計画問題として扱えるように、制約 条件および目的関数の形に焼き直す
- 制約条件:目標TIF

$$\left| \sum_{j=1}^{J} I_j(\theta_k) x_j - T(\theta_k) \right| \le y, \ \forall k = 1, ..., K$$

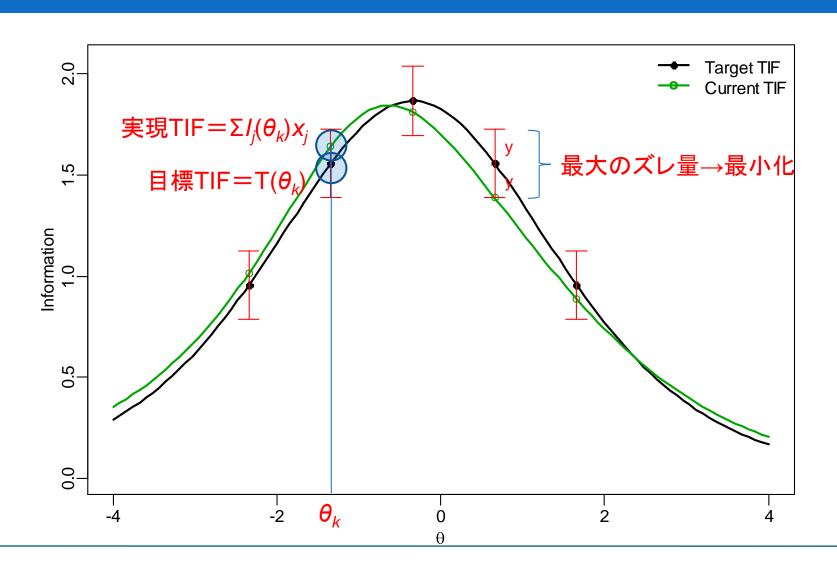
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{J} I_{j}(\theta_{k}) x_{j} + y \ge T(\theta_{k}) \\ \sum_{j=1}^{J} I_{j}(\theta_{k}) x_{j} - y \le T(\theta_{k}) \end{cases} \quad \forall k = 1, ..., K$$

- $y \ge 0$ は各評価点 $\theta_k$ での目標TIFと実現TIFとのズレ(エラー) の最大量
- 目的関数: z=y→最小化(minimaxアプローチ)
- R+glpkAPIパッケージで計算

# 項目プールの平均情報量と 目標テスト情報量

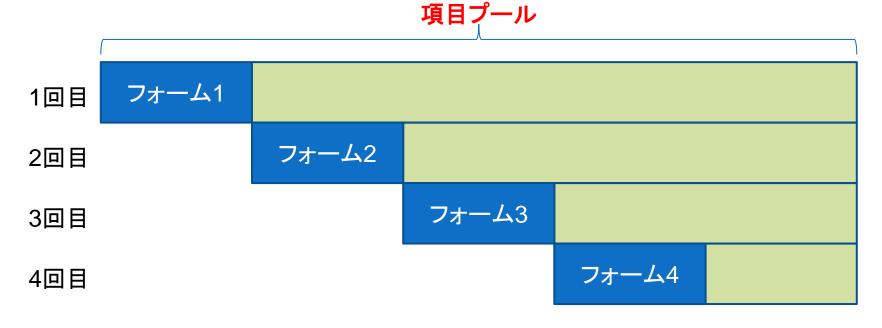


## 目標TIFとminimaxアプローチ



#### 逐次構成:考え方

- 1フォームずつ構成
  - 構成するフォームの数だけ計算を実行
  - 都度, 既にフォームに採用された項目は候補から除外



#### 逐次構成:テスト構成モデル

## 逐次構成: glpkAPIにおける指定

#### ## 決定変数のサイズとラベル

```
addColsGLPK(prob,J+1) # 列数=項目数+1 setColsNamesGLPK(prob,1:(J+1),c(paste0("x",1:J),"y")) # 変数名
```

#### ## 決定変数の型指定

```
setColsKindGLPK(prob,1:J,rep(GLP_BV,J)) # xjは二値型 setColKindGLPK(prob,J+1,GLP_CV) # yは連続型
```

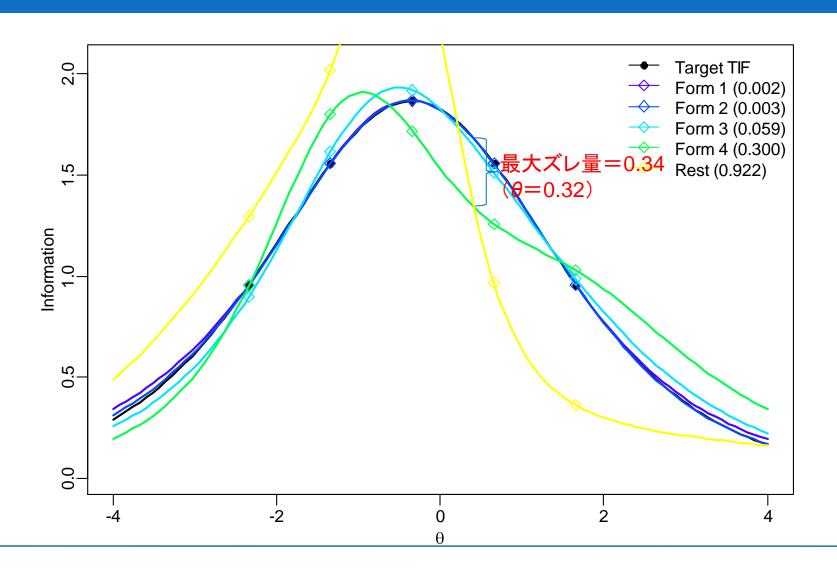
#### ## 決定変数の制約

```
setColBndGLPK(prob,J+1,GLP_LO,0.0,0.0) \# y>=0
```

#### ## 係数 cの指定

setObjCoefsGLPK(prob, 1: (J+1), c(rep(0, J), 1))

# 逐次構成:結果



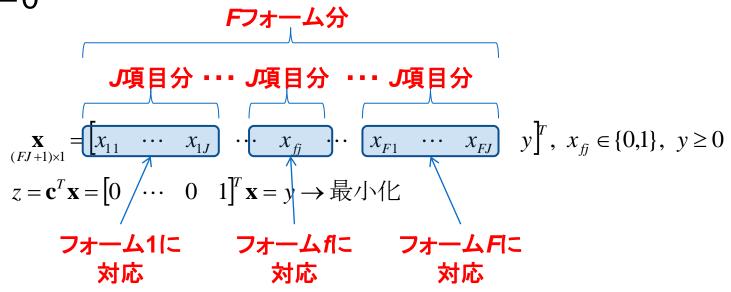
## 同時構成:考え方

- すべてのフォームを一度に構成
  - 構成するフォームについて、全体最適化を目指す
  - 計算の実行は1回だが、規模は増大

1回目 フォーム1 フォーム2 フォーム3 フォーム4

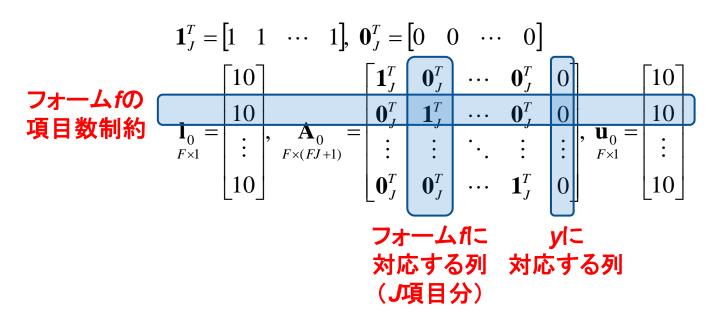
項目プール

- 決定変数ベクトルxをフォームの数だけ「拡張」
  - 項目jがフォームfに含まれる場合は $x_{fj}$ =1, そうでなければ $x_{fj}$ =0



• 制約条件も、xに対応して拡張する

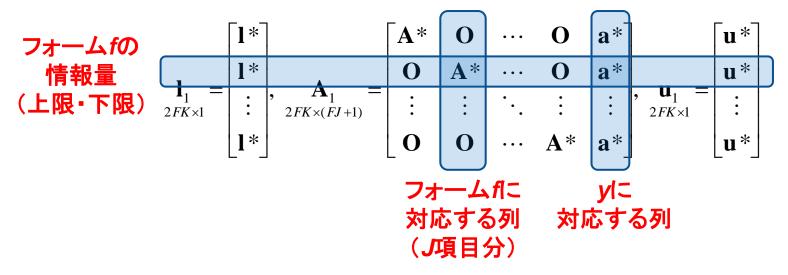
• 項目数



#### 目標TIF

$$\mathbf{I}_{2K \times 1}^{*} = \begin{bmatrix} T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_k) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2K \times J}^{*} = \begin{bmatrix} I_1(\theta_1) & \cdots & I_j(\theta_1) & \cdots & I_J(\theta_1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ I_1(\theta_k) & & I_j(\theta_k) & & I_J(\theta_k) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ I_1(\theta_K) & \cdots & I_j(\theta_K) & \cdots & I_J(\theta_K) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ I_1(\theta_1) & \cdots & I_j(\theta_1) & \cdots & I_J(\theta_1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ I_1(\theta_k) & & I_j(\theta_k) & & I_J(\theta_k) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ I_1(\theta_K) & \cdots & I_j(\theta_K) & \cdots & I_J(\theta_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{2K \times 1}^{*} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \infty \\ T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{2K \times 1}^{*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \end{bmatrix}$$

#### 目標TIF



フォーム内の制約は、対角 ブロック行列として表現

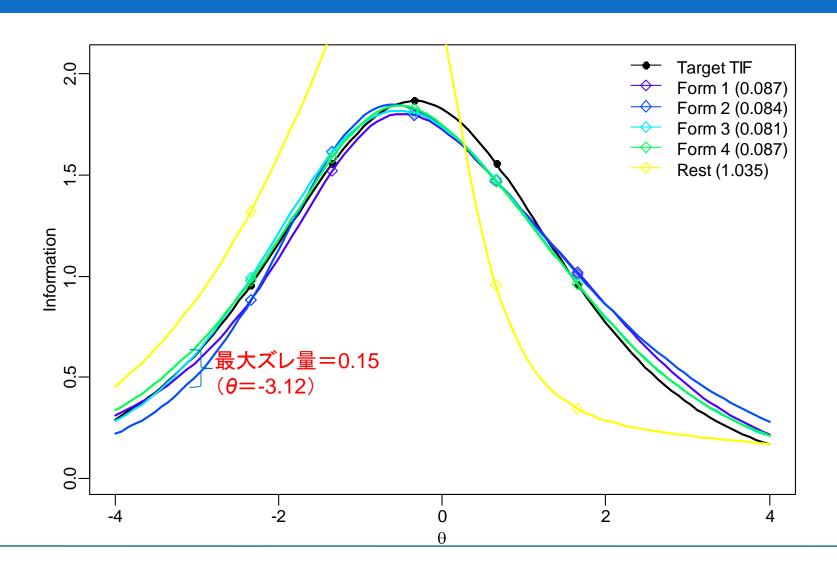
• フォーム間で項目の重複を許さないための制約を追加

$$\mathbf{I}_{J \times J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
 フォーム間の制約は、「行」ブロック行列として表現 
$$\mathbf{l}_{2} = \mathbf{0}_{J}, \quad \mathbf{A}_{2} = [\mathbf{I}_{J} \quad \mathbf{I}_{J} \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{J} \quad \mathbf{0}_{J}], \quad \mathbf{u}_{2} = \mathbf{1}_{J}$$
 フォーム  $\mathbf{f}$ に 対応する列 対応する列 (J項目分)

まとめると・・・

$$\mathbf{l}_{(F+2FK+J)\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(F+2FK+J)\times (FJ+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(F+2FK+J)\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

# 同時構成:結果

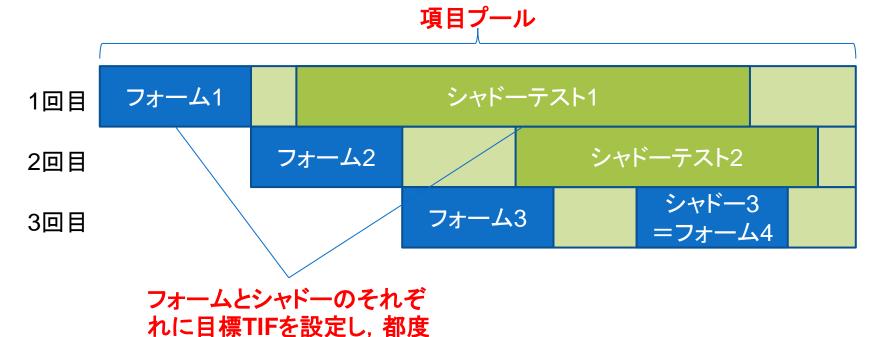


#### BST:考え方

• 逐次構成と同時構成の折衷案

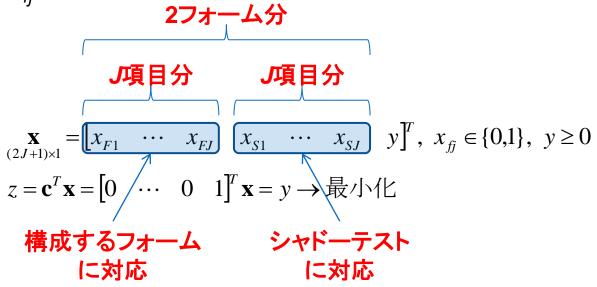
2フォームを同時構成

毎回、「構成するフォーム」「将来構成するフォームの候補(= shadow test)」の2つのフォームを同時構成→これを繰り返し



#### BST: テスト構成モデル

- 決定変数ベクトルxを構成フォーム+シャドーテストに拡張
  - 項目jがフォームf(=FまたはS)に含まれる場合は $x_{fj}$ =1, そうでなければ $x_{fi}$ =0



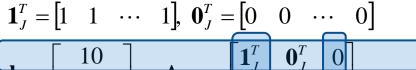
• 制約条件も、xに対応して拡張する

## BST:テスト構成モデル

#### • 項目数

構成フォームの 項目数制約

シャドーテストの項目数制約



$$\begin{bmatrix} 10 \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ 10F_{rest} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ 2\times (FJ+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ \mathbf{0}_{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ \mathbf{1}_{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{I} \\ 2\times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\times 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{rest}$$
 = 残りの構成フォーム数

フォームflc yに 対応する列 対応する列 (**J**項目分)

## BST: テスト構成モデル

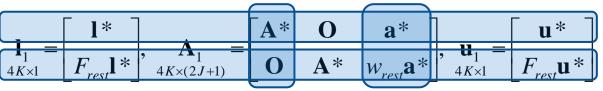
#### 目標TIF

$$\mathbf{I}^*_{2K \times 1} = \begin{bmatrix} T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_k) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^*_{2K \times J} = \begin{bmatrix} I_1(\theta_1) & \cdots & I_j(\theta_1) & \cdots & I_J(\theta_1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ I_1(\theta_k) & & I_j(\theta_k) & & I_J(\theta_k) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ I_1(\theta_K) & \cdots & I_j(\theta_K) & \cdots & I_J(\theta_K) \\ I_1(\theta_1) & \cdots & I_j(\theta_1) & \cdots & I_J(\theta_1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ I_1(\theta_k) & & I_j(\theta_k) & & I_J(\theta_k) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ I_1(\theta_K) & \cdots & I_j(\theta_K) & \cdots & I_J(\theta_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^*_{2K \times 1} = \begin{bmatrix} \infty \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^*_{2K \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ T(\theta_1) \\ \vdots \\ T(\theta_K) \end{bmatrix}$$

#### BST:テスト構成モデル

#### 目標TIF

構成フォーム の情報量 (上限・下限) シャドーテス トの情報量 (上限・下限)



 $F_{rest}$  = 残りの構成フォーム数,  $w_{rest}$  = yに対する重み

フォームfに yに 対応する列 対応する列 (**J**項目分)

#### BST:テスト構成モデル

フォーム間で項目の重複を許さないための制約

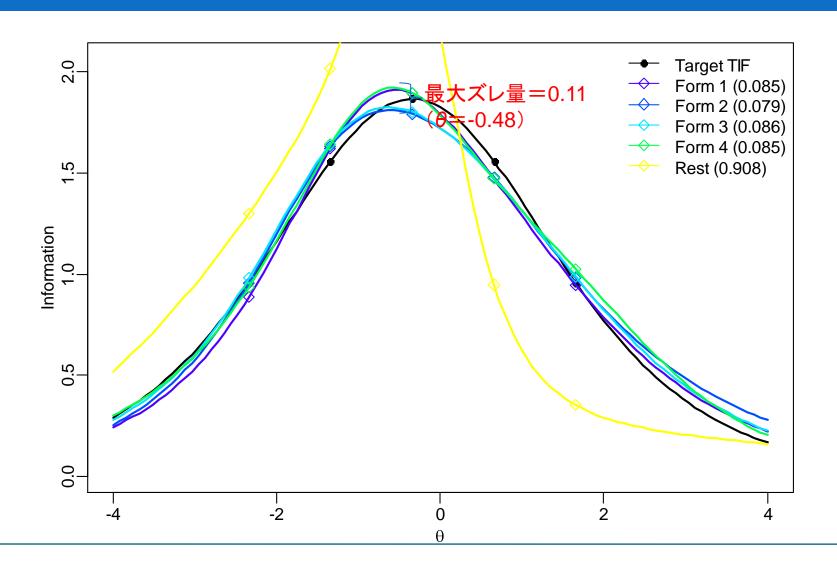
$$\mathbf{I}_{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_{2} = \mathbf{0}_{J}, \quad \mathbf{A}_{2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{J} & \mathbf{I}_{J} & \mathbf{0}_{J}, \mathbf{u}_{2} = \mathbf{1}_{J} \\ J \times 1 & J \times 1 \end{bmatrix}$$
フォームfに 対応する列 対応する列 (プ項目分)

まとめると・・・

$$\mathbf{l}_{(2+4K+J)\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(2+4K+J)\times (2J+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(2+4K+J)\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

# BST:結果



#### まとめ

- 同時構成&BSTではより等質なフォームが得られた
  - ただし、同時構成は非常に時間がかかる
  - 線形計画法の枠内では、BSTが妥当な選択か
- 今回の例では、平均項目プール情報量に比較的近い 目標TIFを設定
  - 両者が離れるほど、逐次構成における「劣化」はより顕著に
  - 両者が離れるほど(項目プールのサイズに対して使用する項目の割合が大きくなるほど),同時構成/BSTでも平均的なエラーは増加→何らかの追加制約が必要

# まとめ

#### • 項目一致数

SEQ /SIM	1	2	3	4	R
1	5	3	0	2	0
2	1	3	2	3	1
3	0	0	6	4	0
4	4	4	0	1	1
R	0	0	2	0	8

SEQ /BST	1	2	3	4	R
1	2	3	1	3	1
2	3	0	3	2	2
3	2	1	4	3	0
4	2	4	1	2	1
R	1	2	1	0	6

SIM /BST	1	2	3	4	R
1	2	2	0	5	1
2	3	2	4	1	0
3	4	2	2	2	0
4	1	3	3	2	1
R	0	1	1	0	8

#### 全体的なまとめ

- 項目プールの維持・利用
  - 事前に, 中長期的な視点で, 綿密な計画を立てておく
  - 継続的に実行可能であることが重要・・・一旦動き始めてしまうと、 変更は困難
  - 計画段階でのパイロット研究やシミュレーション研究は非常に有用
- Input
  - 作問(領域,項目数,歩留まり・・・)
  - 等化デザイン(データ収集計画&等化法)
- Output
  - テスト仕様&実施計画
  - 候補項目の使用ルール
- 参考文献: Wendler & Walker (2006)

#### 参考文献

- Belov, D. I., & Armstrong, R. D. (2006). A constraint programming approach to extract the maximum number of non-overlapping test forms. *Computational Optimization and Applications*, **33**, 319-332.
- 茨木俊秀・福島雅夫 (1993). 最適化の手法 共立出版
- Ishii, T., Songmuang, P., & Ueno, M. (2014). Maximum clique algorithm and its approximation for uniform test form assembly. *IEEE Transaction on Learning Technologies*, **7**, 83-95.
- 加藤健太郎・山田剛史・川端一光 (2014). Rによる項目反応理論 オーム社
- van der Linden, W. J. (2005). Linear models for optimal test design. NY: Springer.
- Songmuang, P. & Ueno, M. (2011). Bees algorithm for construction of multiple test forms in e-testing. *IEEE Transaction on Learning Technologies*, **4**, 209-221.
- Sun, K.-T., Chen, Y.-J., Tsai, S.-Y., & Cheng, C.-F. (2008). Creating IRT-based parallel test forms using the genetic algorithm method. *Applied Measurement in Education*, **21**, 141-161.
- Wendler, C. L. W., & Walker, M. E. (2006). Practical issues in designing and maintaining multiple test forms for large-scale programs. In Downing, S. M., & Haladyna, T. M. (Eds.), *Handbook of test development* (pp. 445-467), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.