IRT における信頼性係数について

ベイズ的分析の観点からの多次元信頼性係数の試み

○岡本安晴
日本女子大学人間社会学部

問　題

項目反応理論（IRT）における信頼性係数は、古典テスト理論にならって能力θの推定値$\hat{\theta}$を

（１）　$\hat{\theta} = \theta + E$

と表して、次式

（２）　$\rho = V(\hat{\theta})/V(\theta)$

で与えられる（豊田、1989 ; Samejima、1994)。式（１）による$\hat{\theta}$の分解は、最尤法においては意味をもつが、ベイズ的方法では無理がある。また、最尤法における情報関数の利用は漸近定理に基づくものであり、項目数が十分に多いか注意が必要である。ベイズ的方法では、データから得られる情報はパラメータの分布関数の変化

（３）　$\underset{(\text{事前分布})}{P_{prior}(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \underset{(\text{事後分布})}{P_{post}(\theta) = P(\theta|\text{データ})}$

として与えられる。平均値とかモードによる点推定値は、分布の代表値の１つであるに過ぎず、データから得られる情報は事後分布$P_{post}(\theta)$で表される。このとき、式（１）は無意味である。パラメータの真値は、１点の値θで表されるのではなく、事前分布$P_{prior}(\theta)$で表され、このとき１点の値θとか$\hat{\theta}$は便宜的な値であり、式（１）のような分解式は無意味である。ベイズ的分析において意味をもつのは、θの分布$P_{prior}(\theta)$と$\hat{\theta}$の分布に相当する$P_{post}(\theta)$である。モデル（１）は物理学的対象を１点の値で表す古典物理学に対応し、モデル（３）は物理学的対象を確率分布で表す量子力学に対応していると見ることができる。モデル（３）のもとでは、式（２）はそのままでは使えない。

提　案

式（２）を以下のように変形する。

$$\rho = 1 - V(E)/V(\theta)$$

誤差Eの分布は、モデル（３）のもとでは$P_{post}(\theta)$に対応し、θの分布は$P_{prior}(\theta)$に対応する。したがって、モデル（３）のもとでの信頼性係数は

（４）　$\rho = 1 - V_{post}(\theta)/V_{prior}(\theta)$

で与えられる。ここで、$V_{prior}(\theta)$および$V_{post}(\theta)$は、分布$P_{prior}(\theta)$および$P_{post}(\theta)$の分散を表す。

式（４）は、θが多因子のときには、次式に拡張される。

（５）　　$\rho = 1 - det(C_{post}(\theta))/det(C_{prior}(\theta))$

ここで、$C_{prior}(\theta)$および$C_{post}(\theta)$は、多次元分布$P_{prior}(\theta)$および$P_{post}(\theta)$の分散共分散行列である。

分布が低次元に縮退しているときは、分散共分散行列の行列式は 0 になる。

$$det\left(C_{prior}(\theta)\right) > det\left(C_{post}(\theta)\right) = 0 \quad \text{のとき} \quad \rho = 1$$

となるが、これを避ける１つの方法は、分布の広がり（θの確定度）を分散共分散行列の行列式ではなくトレース（あるいは、固有値の組）で表すとか、分布のエントロピーを用いることが考えられる。岡本（2007）は、θを離散化してエントロピーを与えている。式（５）においてエントロピーを採用した式は次式となる。

（６）　　$\rho_{entropy} = 1 - Ent_{post}(\theta)/Ent_{prior}(\theta)$

ここで、$Ent_{prior}(\theta)$および$Ent_{post}(\theta)$は、多次元分布$P_{prior}(\theta)$および$P_{post}(\theta)$のエントロピーである。

式（５）および式（６）の性質については、今後の課題とする。

展　開

式（４）における$V_{post}(\theta)$、式（５）における$C_{post}(\theta)$、あるいは式（６）における$Ent_{post}(\theta)$は、モデル（３）の$P\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$によって示されているように「データ」の関数であり、「データ」の確率分布は回答者の値θ_0によって決まる。従って、信頼性係数はθ_0の関数として、

（７）　　$\rho(\theta_0) = 1 - V_{post}\ (\theta|\theta_0)/V_{prior}(\theta)$

（８）　　$\rho(\theta_0) = 1 - det(C_{post}(\theta|\theta_0))/det(C_{prior}\ (\theta))$

（９）　　$\rho_{entropy}(\theta_0) = 1 - Ent_{post}(\theta|\theta_0)/Ent_{prior}(\theta)$

と表される。ここで、$V_{post}(\theta|\theta_0)$は、確率分布$P\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$の分散$V_{post}\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$の期待値

（10）　　$$V_{post}(\theta|\theta_0) = \sum_{\text{データ}} V_{post}\left(\theta\middle|\text{データ}\right)P\left(\text{データ}|\theta_0\right)$$

を、$C_{post}(\theta|\theta_0)$は$P\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$の分散共分散行列$C_{post}\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$の期待値

（11）　　$$C_{post}(\theta|\theta_0) = \sum_{\text{データ}} C_{post}\left(\theta\middle|\text{データ}\right)P\left(\text{データ}|\theta_0\right)$$

を、$Ent_{post}(\theta|\theta_0)$は$P\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$のエントロピー$Ent_{post}\left(\theta\middle|\text{データ}\right)$の期待値

（12）　$$Ent_{post}(\theta|\theta_0) = \sum_{データ} Ent_{post}(\theta|データ)P(データ|\theta_0)$$

を表す。「データ」は、テスト項目が固定されている場合と、適応的方法による決まる場合に分けて考えると以下のようになる。

テスト項目が固定されている場合

項目iの回答カテゴリ数をK_iとおくとき、項目数がmの場合のデータは、$\prod_{i=1}^{m} K_i$通りあることになる。回答パターンをr_1、・・・、r_mと表し、

$$\mathrm{P}(r_1 \cdots r_m|\theta_0) = \prod_{i=1}^{m} P(r_i|\theta_0)$$

とおけば、

（13）　$$\mathrm{P}(データ|\theta_0) = \mathrm{P}(r_1 \cdots r_m|\theta_0) = \prod_{i=1}^{m} P(r_i|\theta_0)$$

と書くことができる。

適応的方法の場合

適応的方法において、項目1～項目mが順番に使われ、それらの回答がr_1、・・・、r_mであったとする。項目sまでの回答パターンr_1、・・・、r_sに対して、次の項目$(s+1)$は一意に決まるものとする。項目1～項目mが順番に用いられ、その回答パターンがr_1、・・・、r_mである確率は

$$\mathrm{P}(r_1 \cdots r_m|\theta_0) = \prod_{i=1}^{m} P(r_i|\theta_0)$$

で表されるとすれば、

（14）　$$\mathrm{P}(データ|\theta_0) = \mathrm{P}(r_1 \cdots r_m|\theta_0) = \prod_{i=1}^{m} P(r_i|\theta_0)$$

となる。ここで、適応的方法の場合は、使用される項目数mは確率的に変動しうる、すなわち回答パターンによって決まる確率変数であると考えることができる。また、式（１４）は、適応的方法に依存して決まることにも注意。

式（７）～（９）より、式（４）～（６）が、次式

(14)　$$\rho = \int \rho(\theta_0) f(\theta_0) d\,\theta_0$$

により与えられる。ここで、$f(\theta)$は、θ の事前確率分布$P_{prior}(\theta)$の確率密度関数である。

計算法

式（４）～（６）の値を、式（７）～（９）によって解析的に算出することは複雑である。しかし、解析的に難しい場合には、シミュレーションによる数値計算によって求めることが広く行われている。式（４）～（６）の場合のシミュレーションの手順は以下のようになる。

シミュレーションの回数をN とおく。(A)～(C)の手順を、t = 1 ~ N に対して繰り返す。

(A)　θ_0の生成；　$\theta_0 \sim P_{prior}(\theta_0)$

(B)　データr_1、・・・、r_mの生成；　$(r_1, \cdots, r_m) \sim P\big((r_1, \cdots, r_m|\theta_0)\big)$

(C)　$V_{post}\big(\theta\big|\text{データ}\big)$、$det\Big(C_{post}\big(\theta\big|\text{データ}\big)\Big)$、あるいは$Ent_{post}\big(\theta\big|\text{データ}\big)$の値を、MCMC におけるサンプリングから推定する。シミュレーションt におけるこれらの値を$V_{post}^{(t)}$、$det\big(C_{post}\big)^{(t)}$、$Ent_{post}^{(t)}$とおく。

(D)　$V_{prior}(\theta)$、$det\Big(C_{prior}(\theta)\Big)$、$Ent_{prior}(\theta)$の値を、解析的方法あるいは MCMC のようなシミュレーションによる数値計算によって求める。それらの値を$\hat{V}_{prior}$、$det\big(\hat{C}_{prior}\big)$、$\hat{E}nt_{prior}$とおく。以上の推定値から、式（４）～（６）の値を以下のように推定する。

式（４）の場合：　$\hat{\rho} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Big(1 - V_{post}^{(t)}/\hat{V}_{prior}\Big)$

式（５）の場合：　$\hat{\rho} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Big(1 - det\big(C_{post}\big)^{(t)}/det\big(\hat{C}_{prior}\big)\Big)$

式（６）の場合：　$\hat{\rho} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Big(1 - Ent_{post}^{(t)}/\hat{E}nt_{prior}\Big)$

引用文献

岡本安晴（2007）「エントロピー最小化基準による適応型テスト――テスト情報関数の問題点――」日本テスト学会誌、3、36－47.

Samejima, F. (1994). Estimation of reliability coefficients using the test information function and its modifications. *Applied Psychological Measurement*, 18, 229-244.

豊田秀樹（1989）「項目反応モデルにおける信頼性係数の推定法」教育心理学研究、37、283－285.