

MCMCによるテスト項目 特性曲線の計算の方法

早稲田大学文学学術院

川端一光

2009年12月12日(土)

第3回日本テスト学会ワークショップ

トピック

- BRugsによる項目特性曲線の計算
- 2母数ロジスティックモデル
 - 分析ファイルの種類と準備
 - モデルの記法
 - CodaによるMCMC標本の分析
- 付録: 名義反応モデル

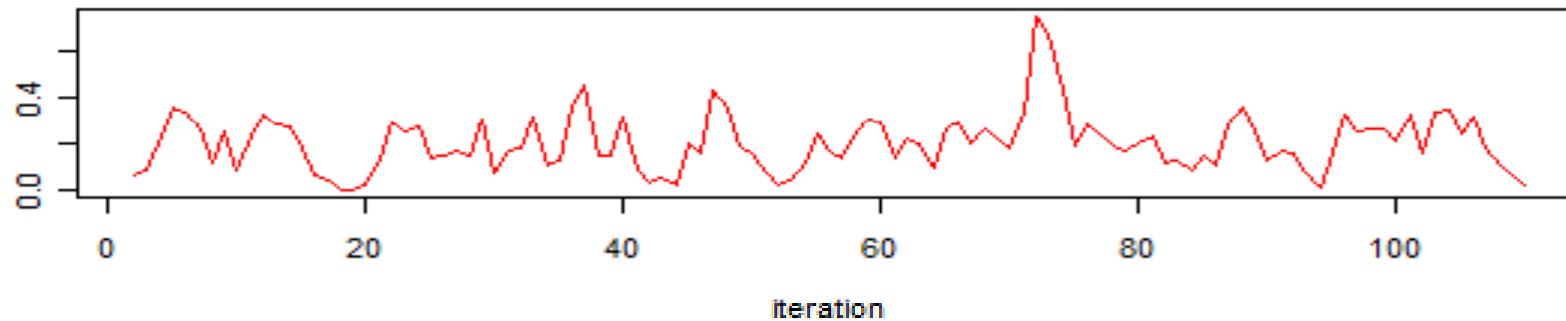
ベイズ推測とその問題

- 母数を確率変数として考え, その分布を推測の対象とする→事後分布
- 母数に関する事前情報, 信念についての確率分布を考える→事前分布
- 事前分布と尤度(モデルとデータ)から, 事後分布を代数的に算出
- 複雑なモデルの場合, 事前分布と尤度の情報から, 事後分布を代数的にもとめることができないことがある
→ベイズ推測にまつわる難点だった

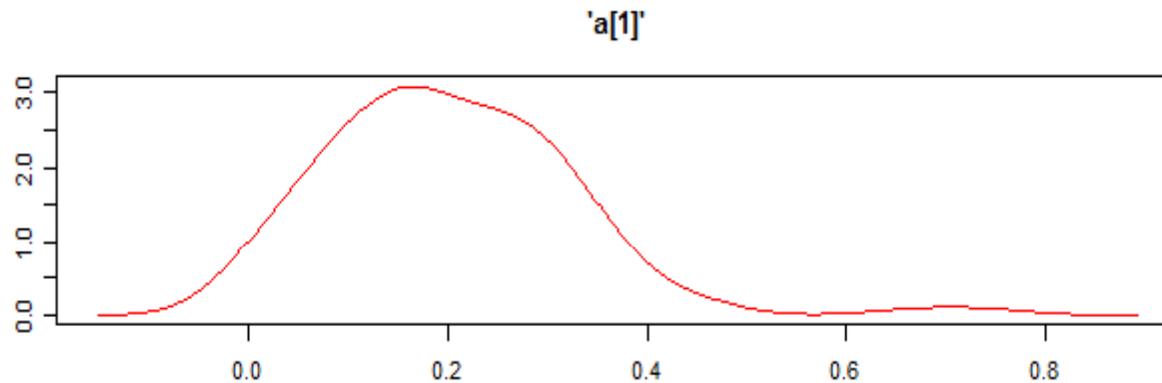
MCMCによる克服

- マルコフ連鎖モンテカルロ法
(Markov Chain Monte Carlo)
- 興味のある母数の事後分布を, アルゴリズムによって得られた複数の推定値(MCMC標本と呼ぶ)の経験分布によって近似する
- MCMC標本のつらなり→マルコフ連鎖
→マルコフ連鎖が目標となる事後分布になるようにアルゴリズムは設計されている
→ギブスサンプラー, MHアルゴリズム

項目識別力のマルコフ連鎖 アルゴリズム110回更新

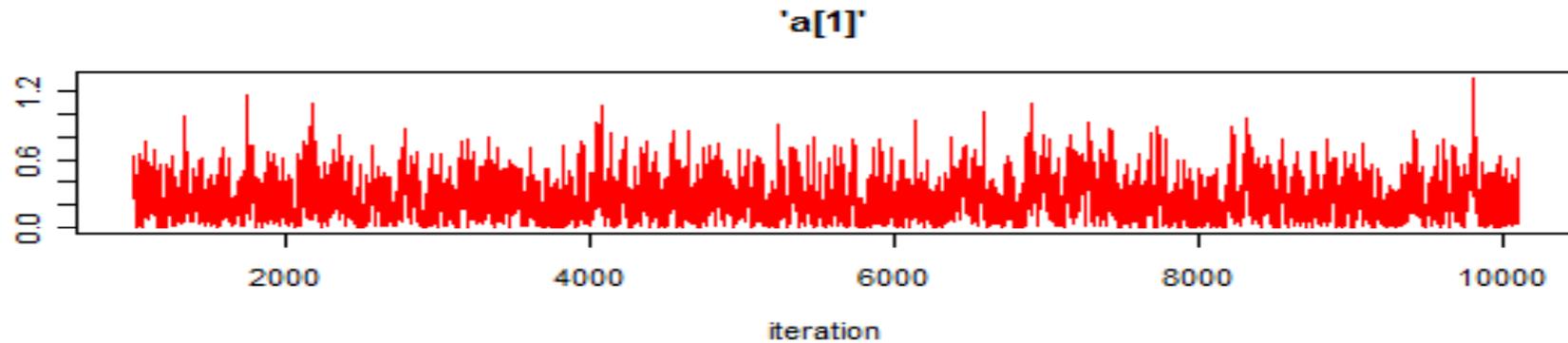


110個のMCMC標本による項目識別力の
経験的(カーネル)密度関数→事後分布である可能性は低い



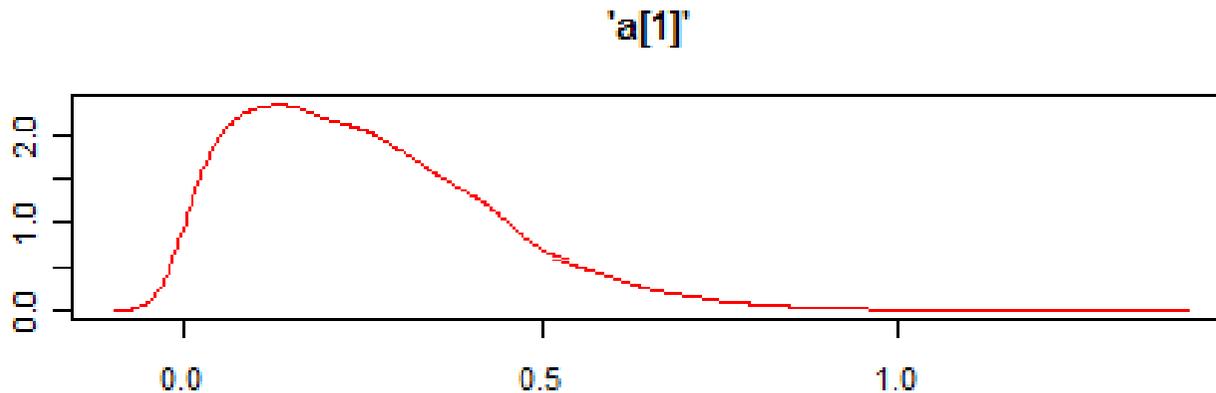
項目識別力のマルコフ連鎖

アルゴリズム10110回更新(最初の1000個は破棄)



9110個のMCMC標本による経験的密度関数

- 事後分布である可能性は相対的に高い
- 事後分布に収束しているならば, その代表値をベイズ推定値とする



BRugsによるベイズ推測

- 指定された確率モデルに対してMCMCによるベイズ推定を行う統計パッケージ
- 統計解析環境R上で動作(パッケージとしてWeb上で無料配布されている). 様々な関数を実装.
- スタンドアローンのSWとしてはWinBUGSが有名
- BRugsはオープンソース版WinBUGSである
OpenBUGSのR上のインターフェイス

BRugsで表現できる 項目反応モデル(一部)

- 1～3母数ロジスティックモデル
- 段階反応モデル
- 名義反応モデル
- 評定尺度モデル
- 連続反応モデル
- 部分採点モデル
- 多次元IRTモデル
- 多母集団IRTモデル

主要なIRTモデルの殆どはBRugsで表現することが可能

BRugsの実行の手順

- Model, Data, Initsの3つのファイルが必要

Model → 確率モデルと事前分布の情報

Data → 分析するデータに関する情報

Inits → マルコフ連鎖に与える母数の初期値に関する情報

- 上記のファイルを作業ディレクトリに保存して、R上から実行する。

BRugsによる
2母数ロジスティックモデル

分析データ

- 基礎統計学に関する10項目(2値型尺度)への116名の回答(豊田, 2008)
- 正答を1, 誤答を0にコーディング
- 被験者37は全問不正解→最尤法では解が発散

項目反応の一部

受験者	項目1	項目2	項目3	項目4	項目5	項目6	項目7	項目8	項目9	項目10
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
2	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
115	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
116	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0

2母数ロジスティックモデル

確率モデル

$$p_{ij} = \frac{1}{1 + \exp\{-1.7\alpha_j(\theta_i - \beta_j)\}}$$

$x_{ij} \sim Be(p_{ij})$, $Be \rightarrow$ 母比率 p のベルヌイ分布

$p_{ij} \rightarrow$ 項目 j での被験者 i の正答確率

$\alpha_j \rightarrow$ 項目 j の識別力母数, $\beta_j \rightarrow$ 項目 j の困難度母数

$\theta_i \rightarrow$ 被験者 i の能力母数

コード (抜粋)

```
p[i,j]<-1/(1+exp(-1.7*a[j]*(theta[i]-b[j])))  
#ベルヌイ分布の母数を構造化する  
x[i,j]~dbern(p[i,j])  
#構造化された母数を所与とするベルヌイ分布から測定値は生成される
```

これがBugsにおける2母数ロジスティックモデルの中核
→たった2行でよい。

2母数ロジスティックモデルのコード (model.txtというファイル名で保存)

```
Model
{
  for(i in 1:I){
    for(j in 1:J){
      p[i,j] <- 1/(1+exp(-1.7*a[j]*(theta[i]-b[j])))
      x[i,j] ~ dbern(p[i,j])
    }
  }
  for(i in 1:I){
    theta[i] ~ dnorm(0,1)
  }
  for(j in 1:J){
    a[j] ~ dnorm(0,2) I(0,)
    b[j] ~ dnorm(0,0.5)
  }
}
```

確率モデル

能力母数の事前分布には、モデルの仮定を反映して標準正規分布とする

各項目の識別力 $a[j]$ は0以下にはならないので、下限が0で分散が0.5の切断正規分布を事前分布とする(コードでは分散の逆数を入力)

各項目の困難度 $b[j]$ については、平均が0、標準偏差が2の正規分布を事前分布とする(コードでは分散の逆数を入力)

データが変わってもこのコードはそのまま利用できる
→勿論、事前分布の分散を変えてもよい

データファイルの作成

(data.txtというファイル名で保存)

```
list(I = 116, J = 10, x=  
structure(.Data = c(  
1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,  
1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,
```

中略

```
0,1,0,1,0,1,1,1,0,0,  
0,1,1,1,0,1,1,0,0,0),  
.Dim = c(116, 10)))
```

- データを116行(被験者数)の10列(項目数)行列として読み込む.

お手元のデータを分析する際には

- I, J, に任意の値を代入
- c()の内部に, カンマ区切りでデータを入力
- .Dim=c(行数,列数)

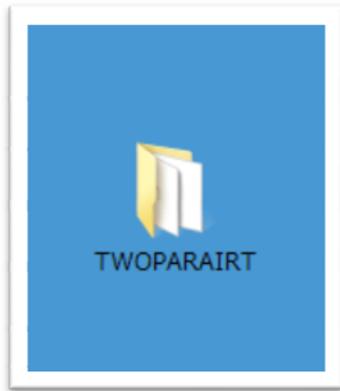
初期値ファイルの作成

(inits.txtというファイル名で保存)

```
list(a = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0))
```

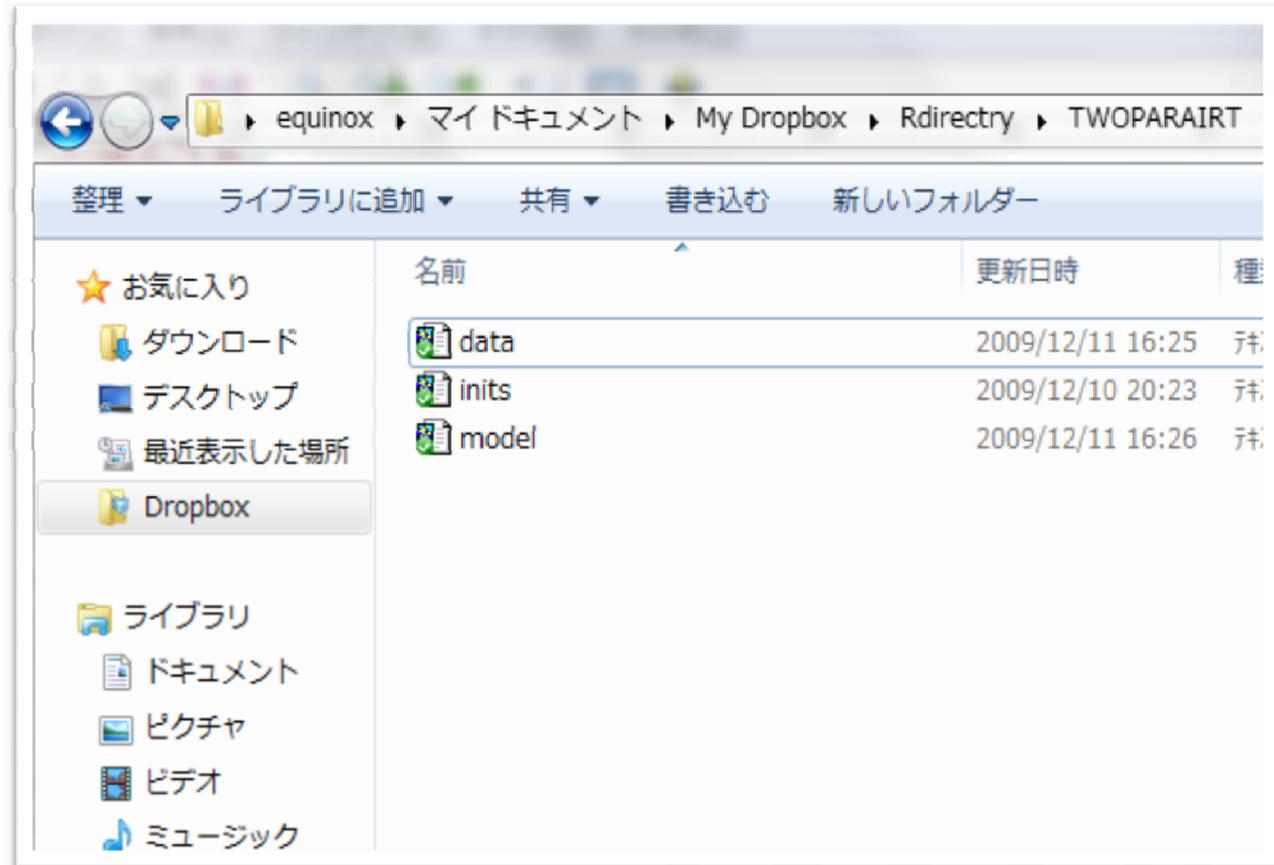
ここでは、10項目の識別力について0を連鎖の初期値として与える

- マルコフ連鎖に与える母数の初期値を与える
- BUGSには自動生成機能もついている
- モデルやデータによっては、自動生成が機能しない場合もあるので、そのような場合には必ず初期値を指定する必要がある



TWOPARAIRT

Model, Data, Initsの3ファイルは、
同一のフォルダに収めておく



setwd("C:/folder1/folder2/...../TWOPARAIRT")

→作業ディレクトリの指定

→途中で日本語名のフォルダをいれない→エラーの原因

実行コード(R上に記述して実行)

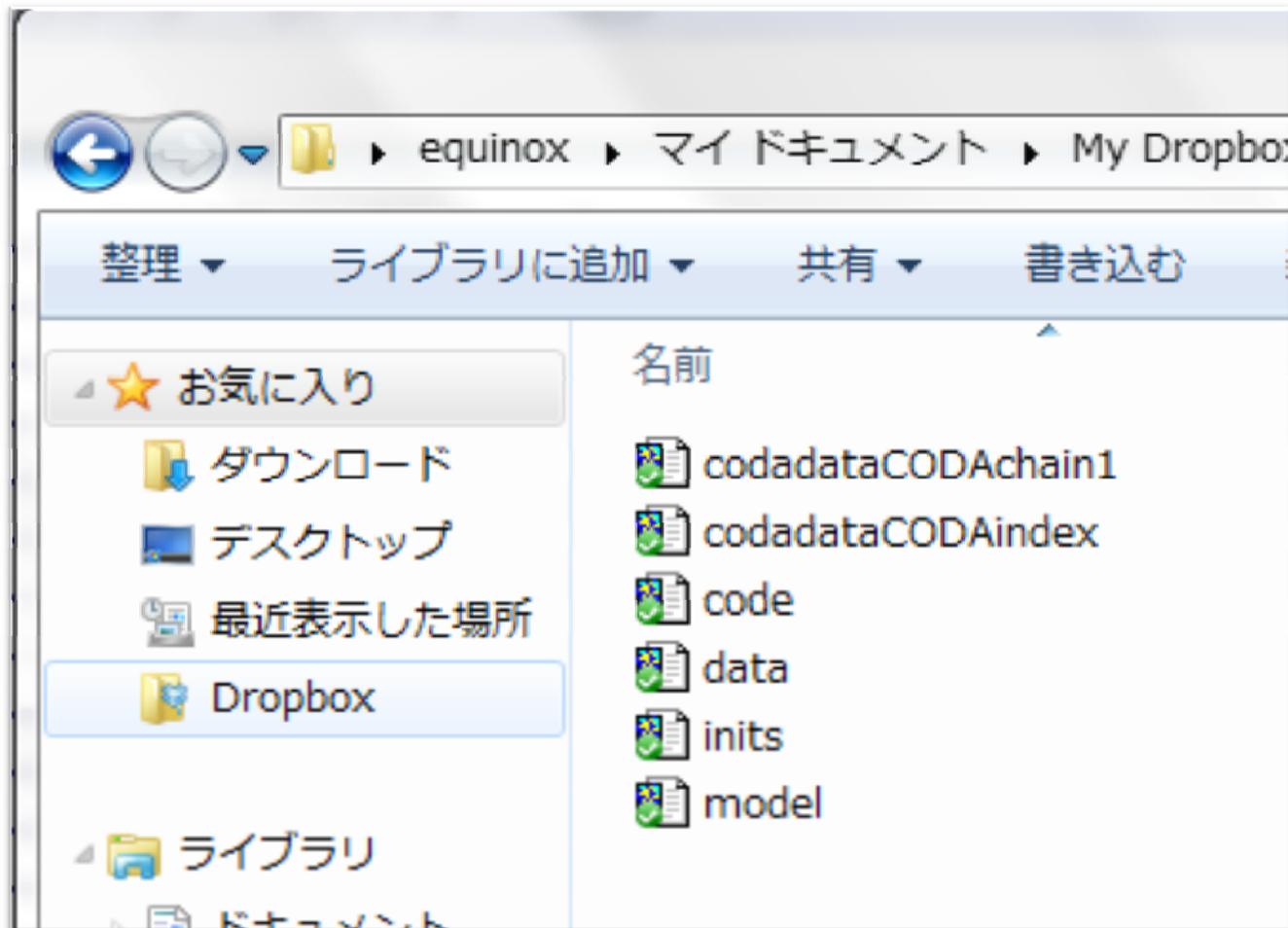
```
library(BRugs) #パッケージの読み込み

modelCheck("model.txt") #モデルの文法確認
modelData("data.txt") #データの読み込み
modelCompile(numChains=1) #モデルのコンパイル(連鎖数を指定)
modelInits("inits.txt") #初期値の読み込み
modelGenInits() #指定していない初期値の発生
samplesSet(c("a","b","theta")) #モニターする母数
modelSetSeed(1234) #乱数発生器の初期値の指定
modelUpdate(11000) #アルゴリズムの更新回数
samplesCoda("*",stem="codadata") #codaファイルの生成
codamenu() #codaメニューの表示
```



アルゴリズムの更新が開始される。モデルやデータによっては更新終了までに膨大な時間を要することがある。

更新終了→作業ディレクトリには
「○○CODAindex.txt」「○○CODAchain1.txt」
という2つのテキストファイルが生成されている。
→アルゴリズムの更新で得られた母数の推定値が収めら
れている。



Rコンソールには次のように表示

```
> codamenu()  
CODA startup menu  
  
1: Read BUGS output files  
2: Use an mcmc object  
3: Quit
```

1: Read BUGS output filesを選択する

```
選択: 1
Enter CODA index file name
(or a blank line to exit)
1: codadataCODAindex.txt
```

と続いて聞かれるので、「codadataCODAindex.txt」と入力する

また,

```
Enter CODA output file names, separated by return key
(leave a blank line when you have finished)
1: codadataCODAchain1.txt
2:
```

と聞かれるので、「codadataCODAchain1.txt」と入力する。
「2:」は空欄でEnterを押す。

Checking effective sample size ...OK

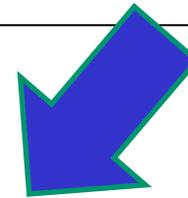
その後、上の出力が出たら、信頼に足る分析(収束判定)が行えるほどの豊富なMCMC標本があると判断して次にすすむ。

→MCMC標本が足りないと警告が出る→再度、標本の抽出

CODA Main Menu

- 1: Output Analysis
- 2: Diagnostics
- 3: List/Change Options
- 4: Quit

選択: 3 |



まずは、分析に利用するMCMC標本を選択する→3を選択

CODA main options menu

- 1: List current options
- 2: Data Options
- 3: Plot Options
- 4: Summary Statistics Options
- 5: Diagnostics Options
- 6: Output Analysis
- 7: Diagnostics
- 8: Main Menu

選択: 2 |

「2: Data Options」
を選択する

- 1: List current data options
- 2: Select variables for analysis
- 3: Select chains for analysis
- 4: Select iterations for analysis
- 5: Select thinning interval
- 5: Return to main options menu

選択: 4 |

「4: Select iteration
for analysis」
を選択する

```
Iterations available = 2:11000
```

```
Enter iteration you wish to start at  
(Default = 2)
```

```
1:1001
```

```
Enter iteration you wish to end at  
(Default = 11000)
```

```
1:11000
```

```
Recreating working data...
```

分析で利用したい
MCMC標本の始点
(1000までの標本は
使わない)

分析で利用したい
MCMC標本の終点

この指定だと、1001番目の標本から11000番目の標本までを利用する

連鎖の最初の標本は使わない

- ・アルゴリズム開始後しばらくは初期値に強く依存したMCMC標本が抽出されつづける

→この期間では、目標となる事後分布(として期待される不変分布)と標本による経験分布の乖離が大きい

→このときの標本を含めて分析(平均をとってベイズ推定値とする等)をすると、推定精度が悪くなる可能性が高い→分析から外す

→マルコフ連鎖が初期値に依存しなくなるまでの期間を設ける

→バーンイン(burn-in)期間

収束判定

- アルゴリズムによって生成されたマルコフ連鎖が、事後分布(であることが期待される不変分布)に十分近づいたといえるかについての判定
→ CODAパッケージに含まれている

```
CODA Main Menu
```

```
1: Output Analysis  
2: Diagnostics  
3: List/Change Options  
4: Quit
```

```
選択: 2 |
```

メインメニューに戻って、
「2: Diagnostics」を
選択

CODA Diagnostics Menu

- 1: Geweke
- 2: Gelman and Rubin
- 3: Raftery and Lewis
- 4: Heidelberger and Welch
- 5: Autocorrelations
- 6: Cross-Correlations
- 7: List/Change Options
- 8: Return to Main Menu

各種診断基準が選択
できる

1:「Geweke」を選択
する

(本来ならば複数の指標
を利用して多角的に判
断すべき)

GewekeのZ得点

各母数について算出される

絶対値が、 $z=1.96$ 以上だと、その母数についてマルコフ連鎖は
(事後分布として期待される)不変分布に至っていない可能性が
示唆される。

→バーイン期間を増やす, アルゴリズムの更新数を増やす

項目1,2,3の識別力母数と, 困難度母数の収束判定

a[1]	a[2]	a[3]
-0.32828	0.22517	-0.39947

b[1]	b[2]	b[3]
0.66403	0.11552	0.20154

全ての母数について、アルゴリズムは事後分布に収束していると判断する

CODA Main Menu

- 1: Output Analysis
- 2: Diagnostics
- 3: List/Change Options
- 4: Quit

選択: 1 |

メインメニューから
1:「Output Analysis」
を選択する

CODA Output Analysis menu

- 1: Plots
- 2: Statistics
- 3: List/Change Options
- 4: Return to Main Menu

選択: 1

1:Plots
MCMC標本のプロット

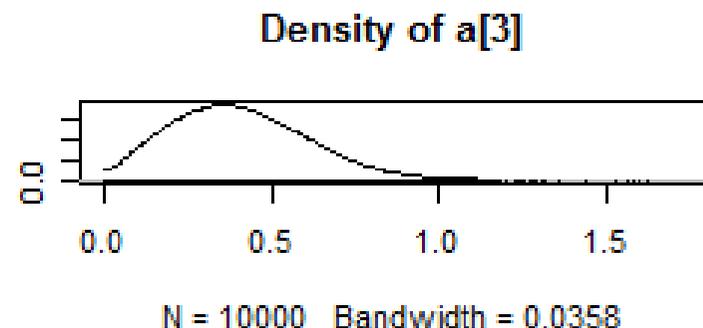
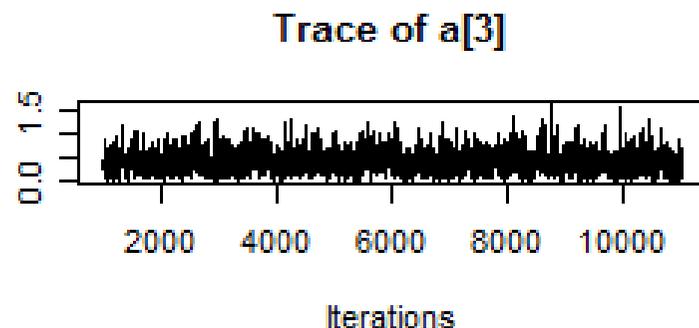
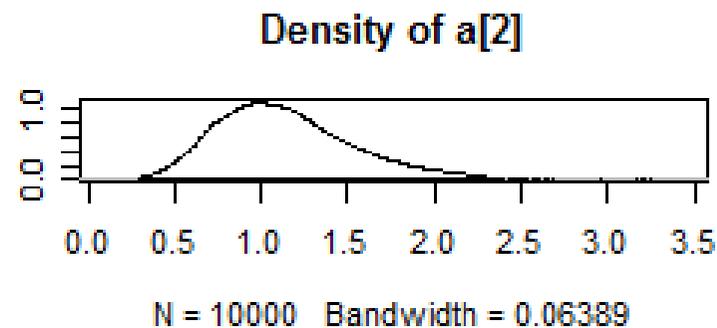
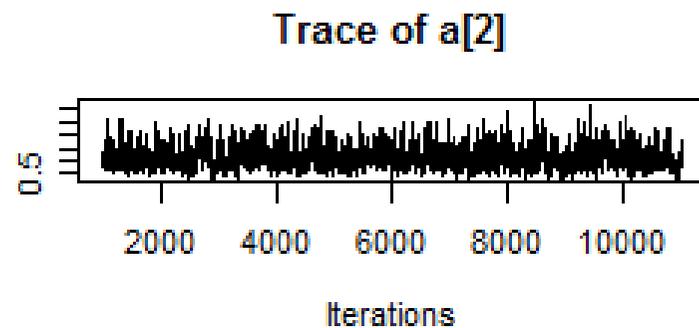
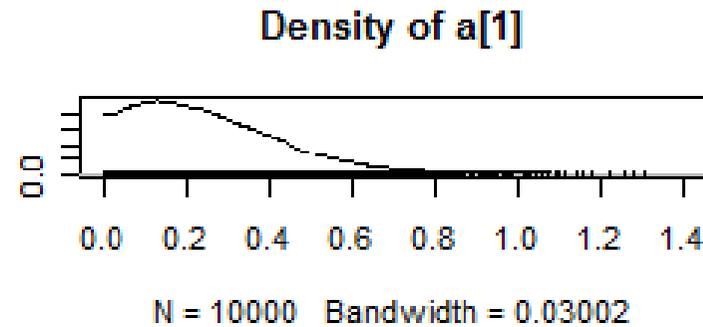
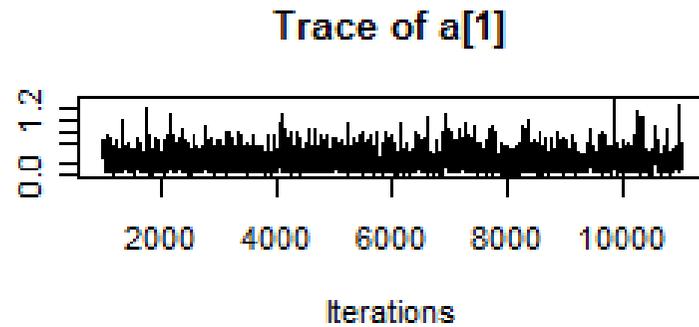
2:Statistics
ベイズ推定値の算出

アルゴリズムの更新履歴

横軸: 更新数, 縦軸: 推定値の値

経験密度関数

→この分布を事後分布とみなす



識別力の事後分布なので、下限が0に
なっている↓事前分布の情報も反映さ
れている

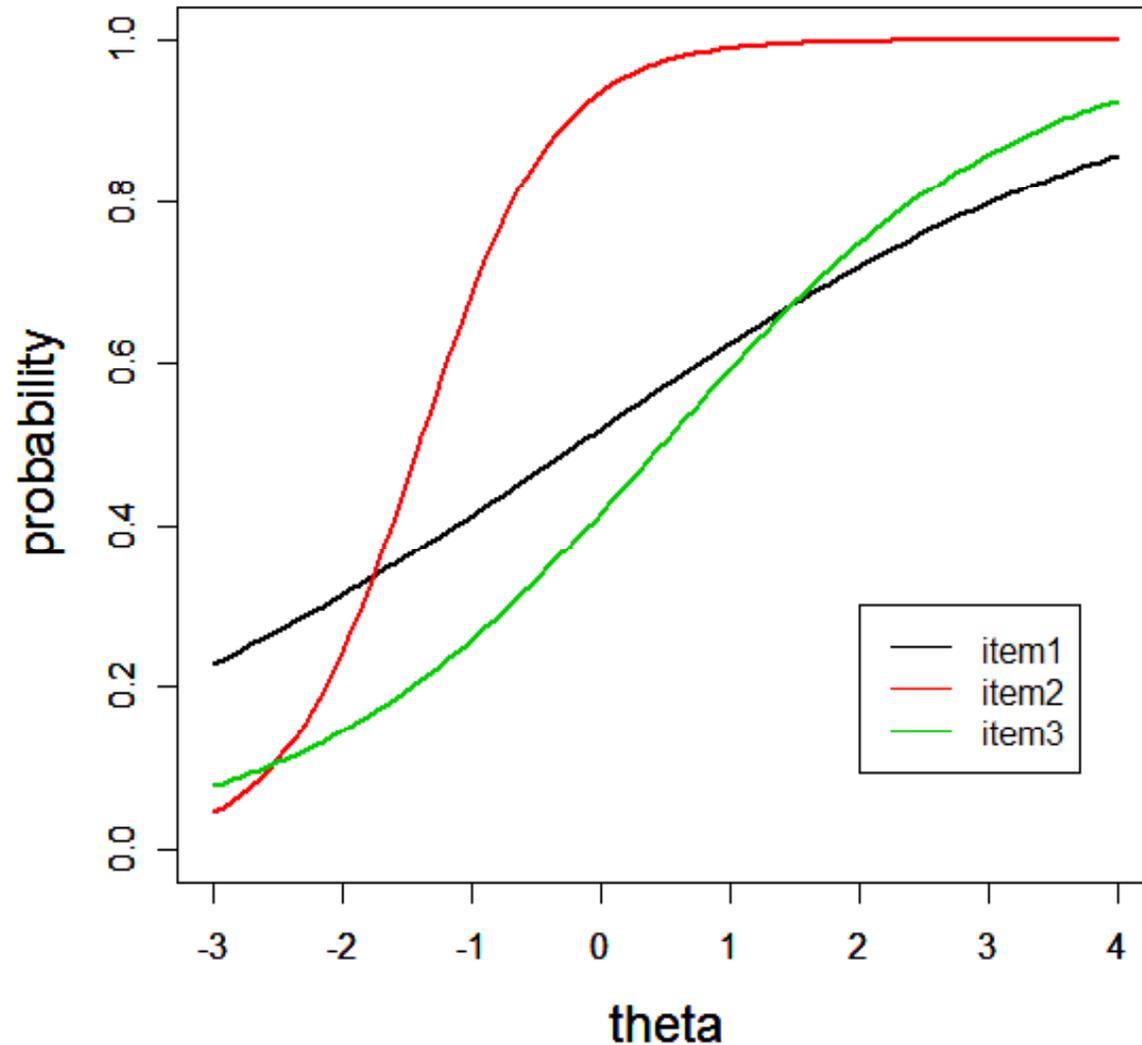
ベイズ推定値

	mean	sd
a[1]	0.254	0.1675
a[2]	1.128	0.3747
a[3]	0.4214	0.225
b[1]	-0.1793	0.6635
b[2]	-1.409	0.3265
b[3]	0.4733	0.4807
theta[1]	-0.1348	0.6877
theta[2]	0.2117	0.7031
theta[3]	-0.2511	0.7031
theta[37]	-1.619	0.7024

3項目の推定結果, 4名の能力母数
a[1]~a[3]→識別力,
b[1]~b[3]→困難度
theta[1] ~theta[3], theta[37] →
→能力母数は発散することなく推定
されている(ベイズ推定の利点)

Mean : 母数のベイズ推定値(シミュレートされた事後分布の平均)
SD: 事後分布の標準偏差

項目特性曲線の描画



	mean
a[1]	0.254
a[2]	1.128
a[3]	0.4214
b[1]	-0.1793
b[2]	-1.409
b[3]	0.4733

付録として、Rによる描画のコードを記載します
(汎用性ありませんのでご参考までに)

BRugsによる項目反応モデル 推定の利点・難点

- 妥当な確率モデルさえ構成すればMCMCによるベイズ推定によって、母数を求める事ができる
- 母数の推定量の構成を気にせず、既存の項目反応モデルの改良や、新しいモデルの構築できる→パイロットスタディ的な利用
- IRTに特化した商用ソフトウェアに比べると、テスト運営に重要な出力が少ない
 - 情報関数, テスト特性曲線, 項目特性曲線の描画

より詳細に....

- ・ マルコフ連鎖の収束判定, 連鎖数
 - ・ アルゴリズムの詳細, 選択法
 - ・ BRugsのコーディングについて
 - ・ 他の項目反応モデルのBRugsによる推定
-
- 豊田秀樹(編著) 2008 マルコフ連鎖モンテカルロ法, 朝倉書店
→ダウンロードデータ(プログラム, データ)
<http://www.asakura.co.jp/books/isbn/978-4-254-12697-6/>

ご参考：項目特性曲線の描画

2母数ロジスティックモデル

```
twopara<-function(a,b,theta){  
  1/(1+exp(-1.7*a*(theta-b)))}  
  
curve(twopara(0.254,-0.1793,x),-3,4,ylab="probability",xlab="theta"  
,cex.lab=1.5,col=1,ylim=c(0,1),lwd=2,lty=1)  
par(new=T)  
curve(twopara(1.128,-1.409,x),-3,4,ylab="probability",xlab="theta"  
,cex.lab=1.5,col=2,ylim=c(0,1),lwd=2,lty=1)  
par(new=T)  
curve(twopara(0.4214,0.4733,x),-3,4,ylab="probability",xlab="theta"  
,cex.lab=1.5,col=3,ylim=c(0,1),lwd=2,lty=1)  
par(new=T)  
legend(2,0.3,c("item1","item2","item3"),col=1:3,lty=1)
```

付録

名義反応モデル

分析データ

- 基礎統計学の学カデータ(豊田, 2008)
- 6項目を抜粋, 226名の回答
- 名義反応データ

項目4: 無作為抽出法をもちいると

- 1) 標本誤差も非標本誤差も影響を推定できる
- 2) 標本誤差の影響だけを推定できる
- 3) 非標本誤差の影響だけを推定できる
- 4) 標本誤差も非標本誤差も影響を推定できない
- 5) 誤差はない

項目反応モデル②

名義反応モデル

$$p_{ijk} = \frac{\exp(\zeta_{jk} + \lambda_{jk}\theta_i)}{\sum_{k'=1}^K \exp(\zeta_{jk'} + \lambda_{jk'}\theta_i)}, \quad K \rightarrow \text{カテゴリ総数} \quad \text{確率モデル}$$

$x_{ijk} \sim M(p_{ij1}, p_{ij2}, \dots, p_{ijk}, \dots, p_{ijK})$, K 個の母確率 p_{ijk} を持つ多項分布

p_{ijk} → 項目 j のカテゴリ k への被験者 i の正答確率

ζ_{jk} → 項目 j のカテゴリ k の切片, λ_{jk} → 項目 j のカテゴリ k の係数

θ_i → 被験者 i の能力母数

コード
(抜粋)

```
prob[i,j,k]<-exp(zeta[j,k]+lambda[j,k]*theta[i])
p[i,j,k]<-prob[i,j,k]/(sum(prob[i,j,]))
#構造化されたカテゴリ毎の反応確率の定義
x[i,j]~dcat(p[i,j,])
#dcat()はベクトルで定義された母数をもつ多項分布
```

名義反応モデルのBugsコード (model.txtというファイル名で保存)

付録

```
model {
{
for(i in 1:N){
for(j in 1:T){
r[i,j]<-resp[i,j]
}
theta[i]~dnorm(0,1)
}
for(i in 1:N){
for(j in 1:T){
for(k in 1:NC){
prop[i,j,k]<-exp(zetan[j,k]+lambdan[j,k]*theta[i])
}
for(k in 1:NC){
p[i,j,k]<-prop[i,j,k]/(sum(prop[i,j,]))
}
r[i,j]~dcat(p[i,j,])
}
}
for(j in 1:T){
for(k in 1:NC){
zeta[j,k]~dnorm(0,1.);zetan[j,k]<-zeta[j,k]-mean(zeta[j,])
lambda[j,k]~dnorm(0,1.);lambdan[j,k]<-lambda[j,k]-mean(lambda[j,])
}
}
}
```

能力母数の
事前分布

確率モデル

切片と係数の
事前分布

データが変わってもこのコードはそのまま利用できる
→勿論、事前分布の標準偏差を変えてもよい

付録

データファイルの作成

(data.txtというファイル名で保存)

```
#N = 被験者数(226)
#T= 項目数(6)
#NC=カテゴリ数(5)
list(l=226,J=6,NC=5,
x=structure(
.Data = c(2,2,4,2,1,3,
5,1,2,1,1,5,
中略
3,4,1,3,5,4,
4,4,2,3,1,3),
.Dim=c(226,6)))
```

- データを226行(被験者数)の6列(項目数)行列として読み込む.

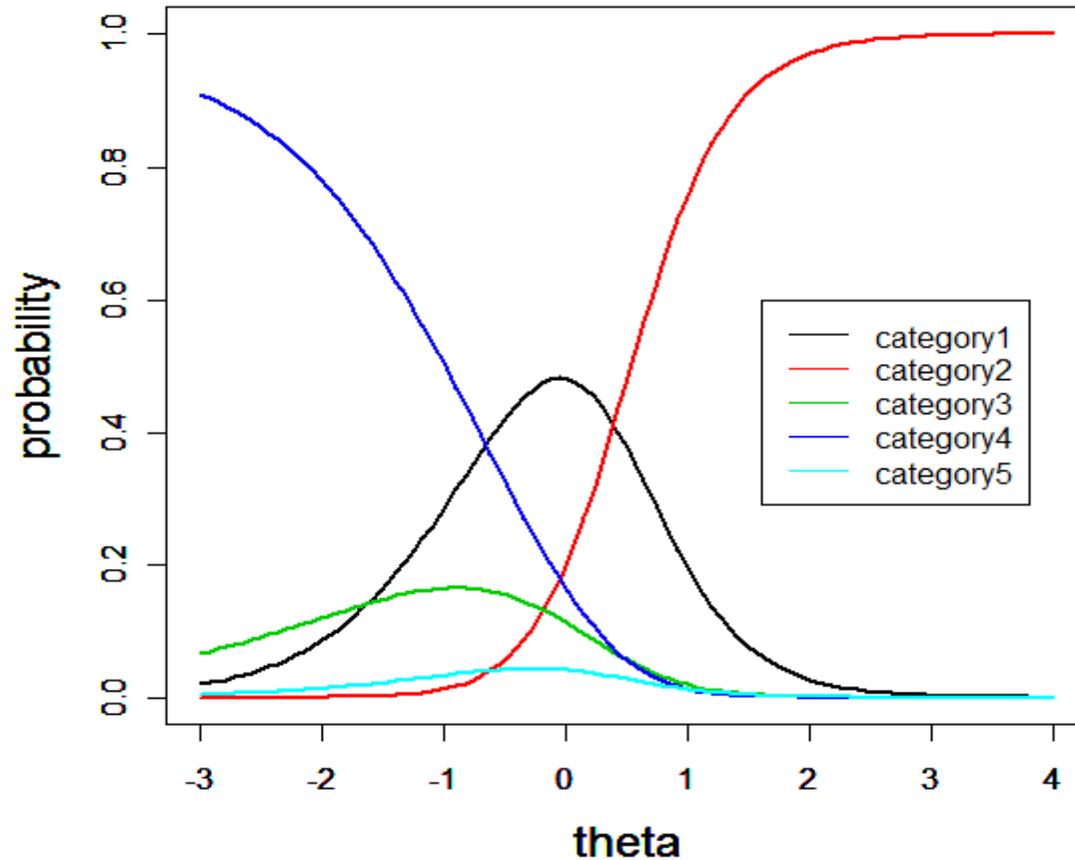
お手元のデータを分析するには

- N, T, NC に任意の値を代入
- .Data = c()の内部に,
カンマ区切りでデータを入力
- .Dim=c(行数,列数)

付録

推定結果

	λ_{41}	ζ_{41}	λ_{42}	ζ_{42}	λ_{43}	ζ_{43}	λ_{44}	ζ_{44}	λ_{45}	ζ_{45}
項目4	0.117	1.169	2.352	0.298	-0.77	-0.276	-1.518	0.093	-0.182	-1.284



- 項目4: 無作為抽出法をもちいると
- 1) 標本誤差も非標本誤差も影響を推定できる
 - 2) 標本誤差の影響だけを推定できる
 - 3) 非標本誤差の影響だけを推定できる
 - 4) 標本誤差も非標本誤差も影響を推定できない
 - 5) 誤差はない