マルチレベルモデルにおける生徒レベルの独立変数の中心化

統計数理研究所
尾崎幸謙

日本人の国民性調査

- 1953年以来5年ごとに実施

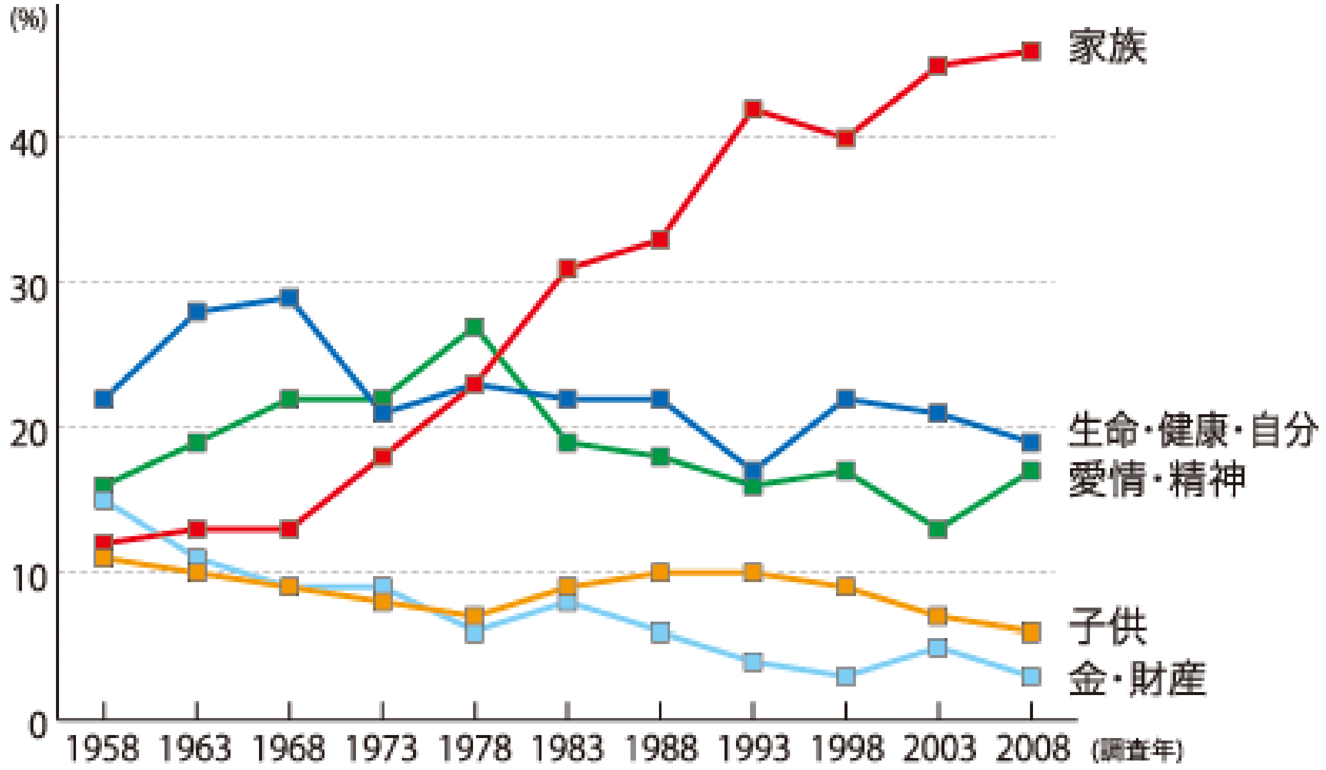
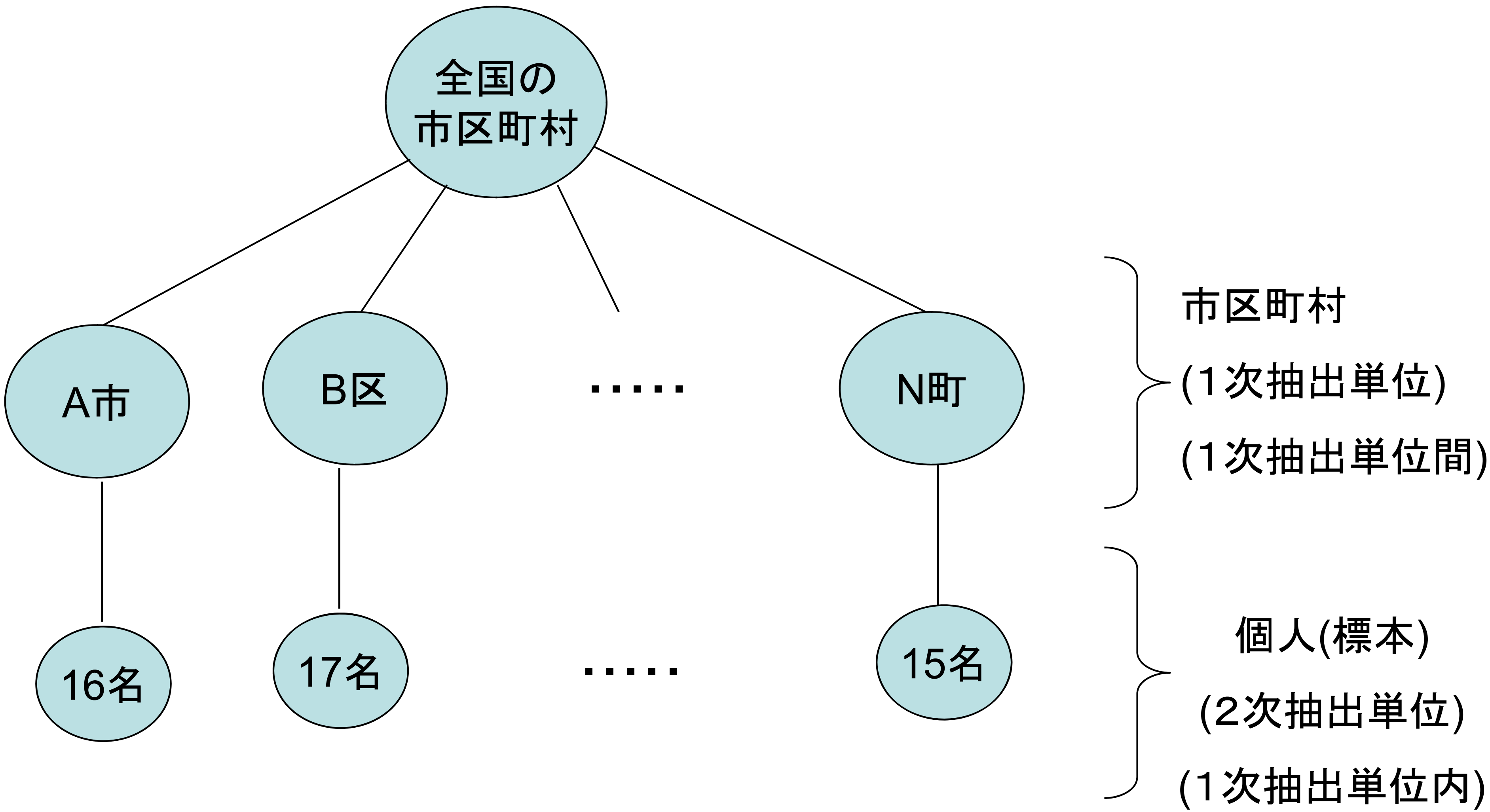


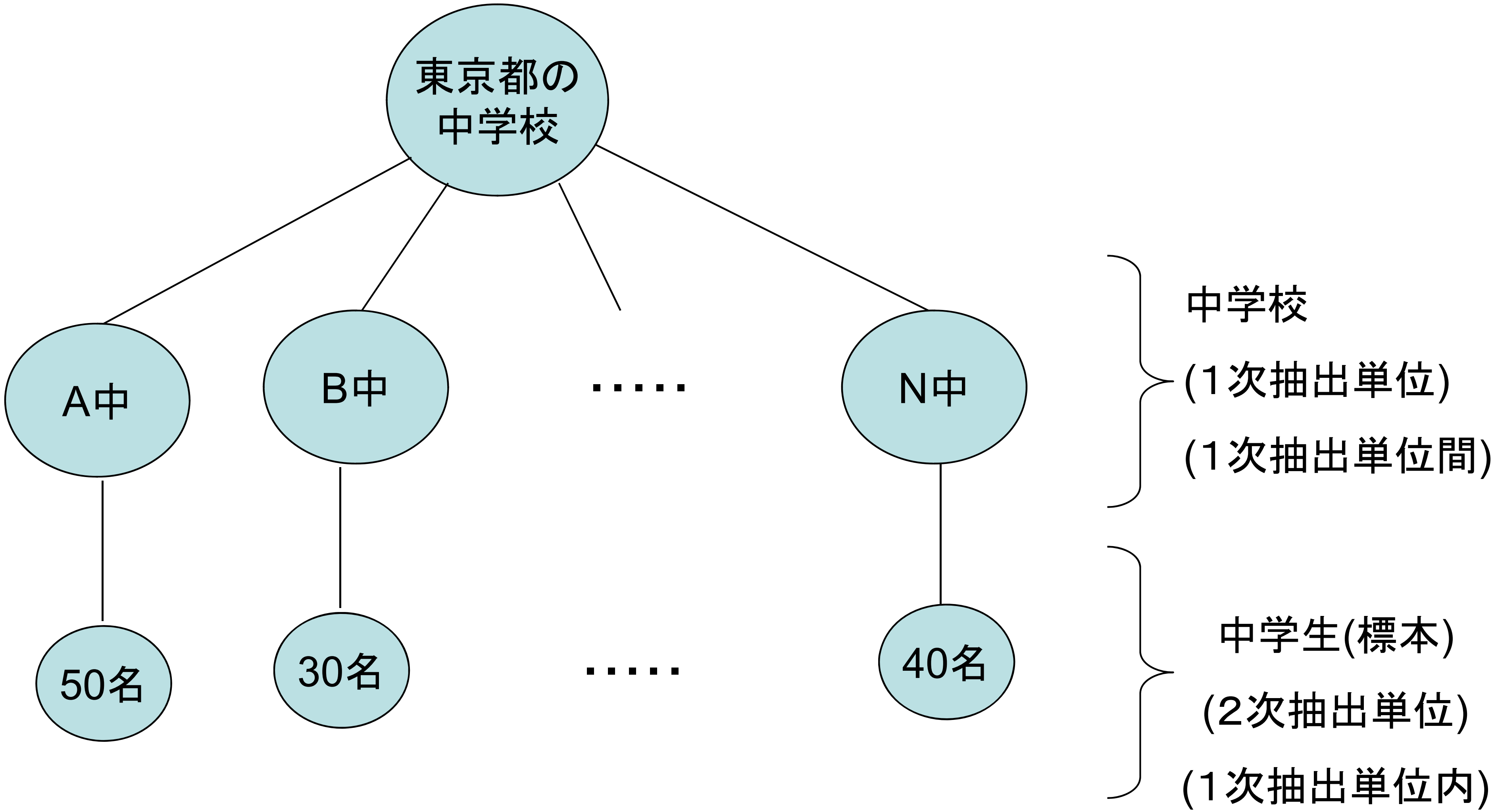
図7: 一番大切なもの(#2.7)に対する回答の推移

- http://www.ism.ac.jp/kokuminsei/index.html

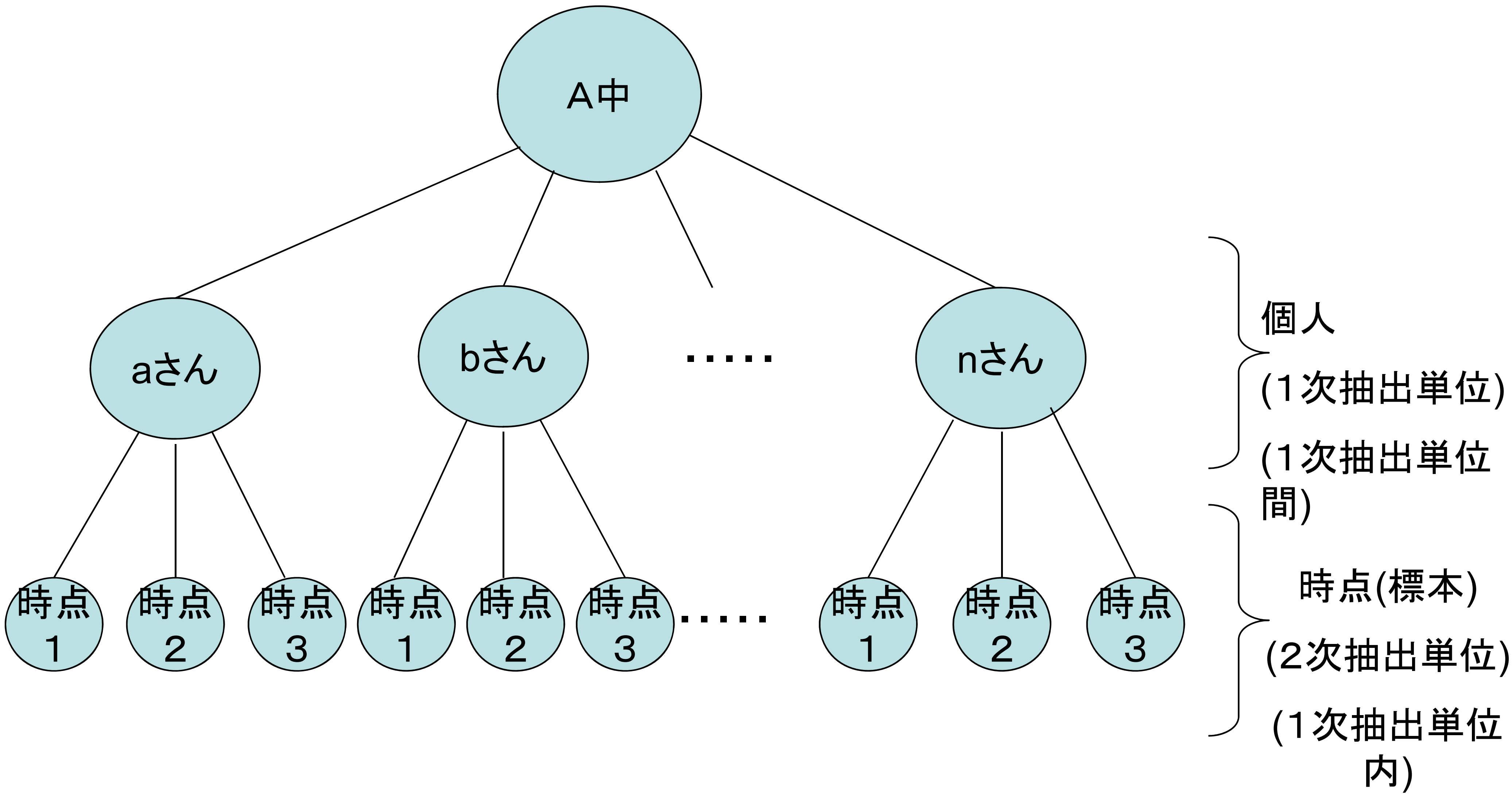
階層性のあるサンプル


全国の
市区町村
A市
B区
・・・・・
N町
16名
17名
・・・・・
15名
市区町村
(1次抽出単位)
(1次抽出単位間)
個人(標本)
(2次抽出単位)
(1次抽出単位内)

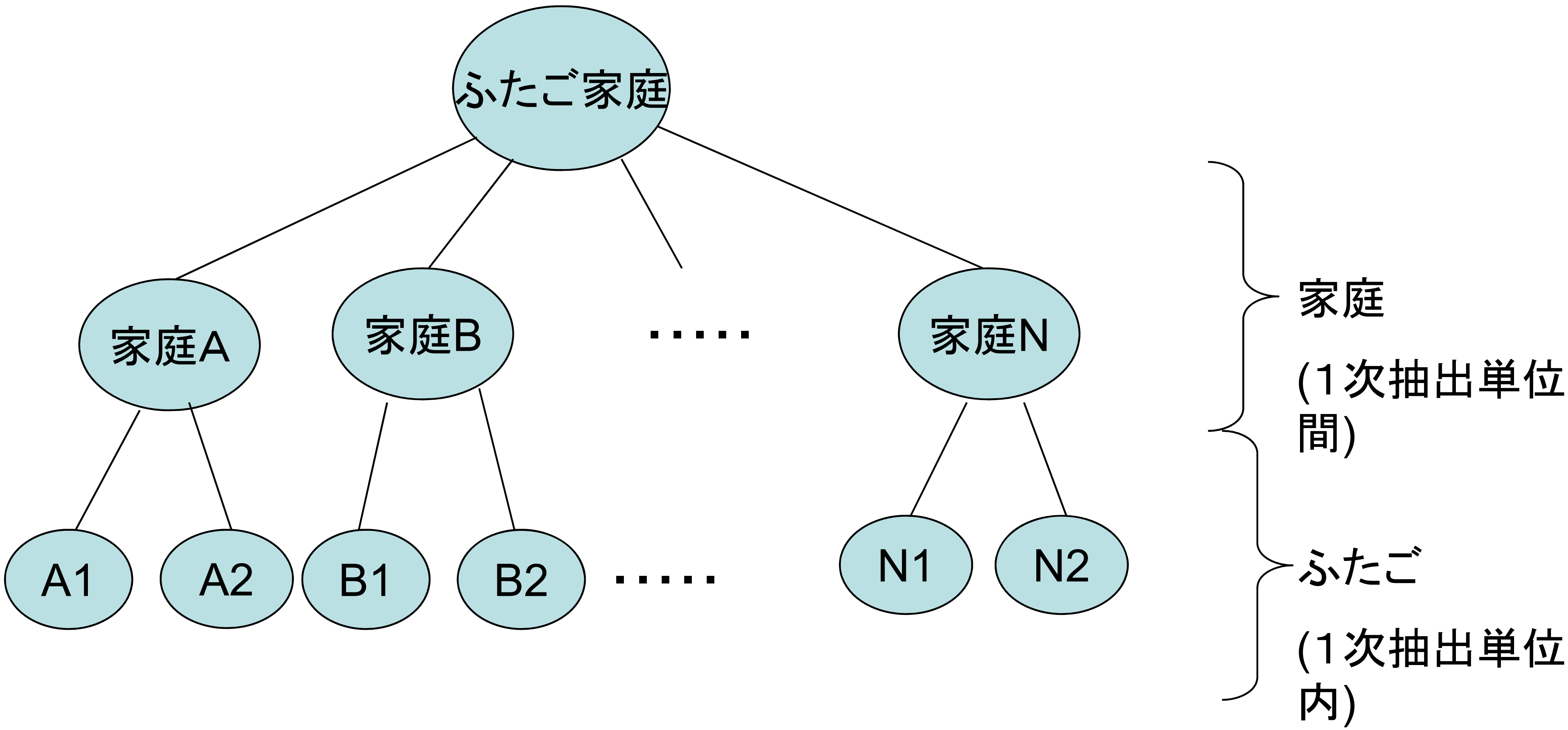
階層性のあるサンプル例①



階層性のあるサンプル例②



階層性のあるサンプル例③



マルチレベルモデル

- 変数間の関係（共分散行列）を，１次抽出単位内（学校内，生徒間）の違いと1次抽出単位間（学校間）の違いに分解し，
- 生徒間レベルと，学校間レベルのそれぞれで，回帰モデルや因子分析モデルを当てはめることで，
- 多段抽出データに対して適切な分析を行う。

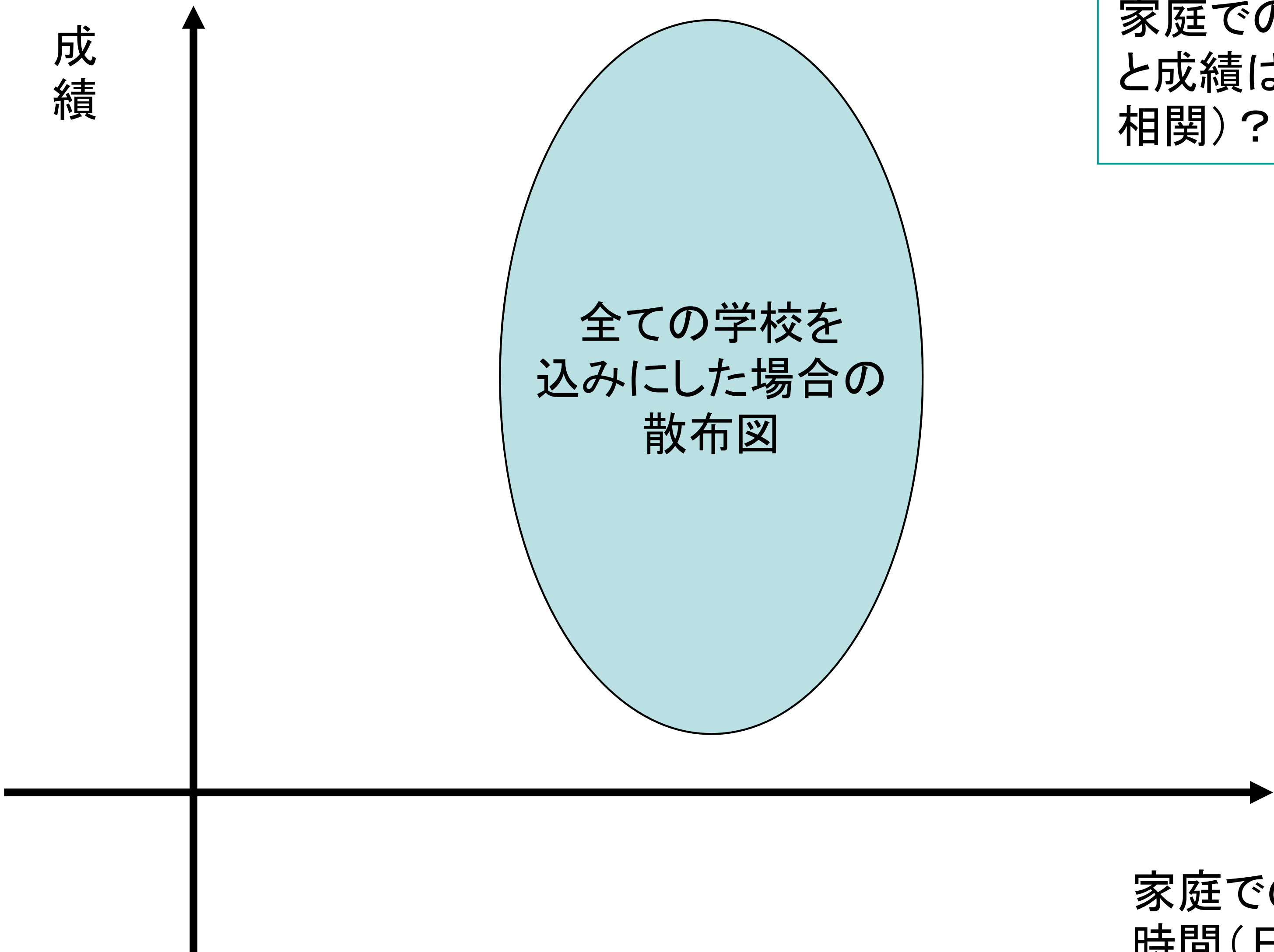
話の流れ

- 階層性のあるサンプル
- マルチレベルモデルが必要な理由
- マルチレベルモデルの考え方
- 独立変数の中心化方法（2種類）
- 独立変数の中心化方法の使い分け

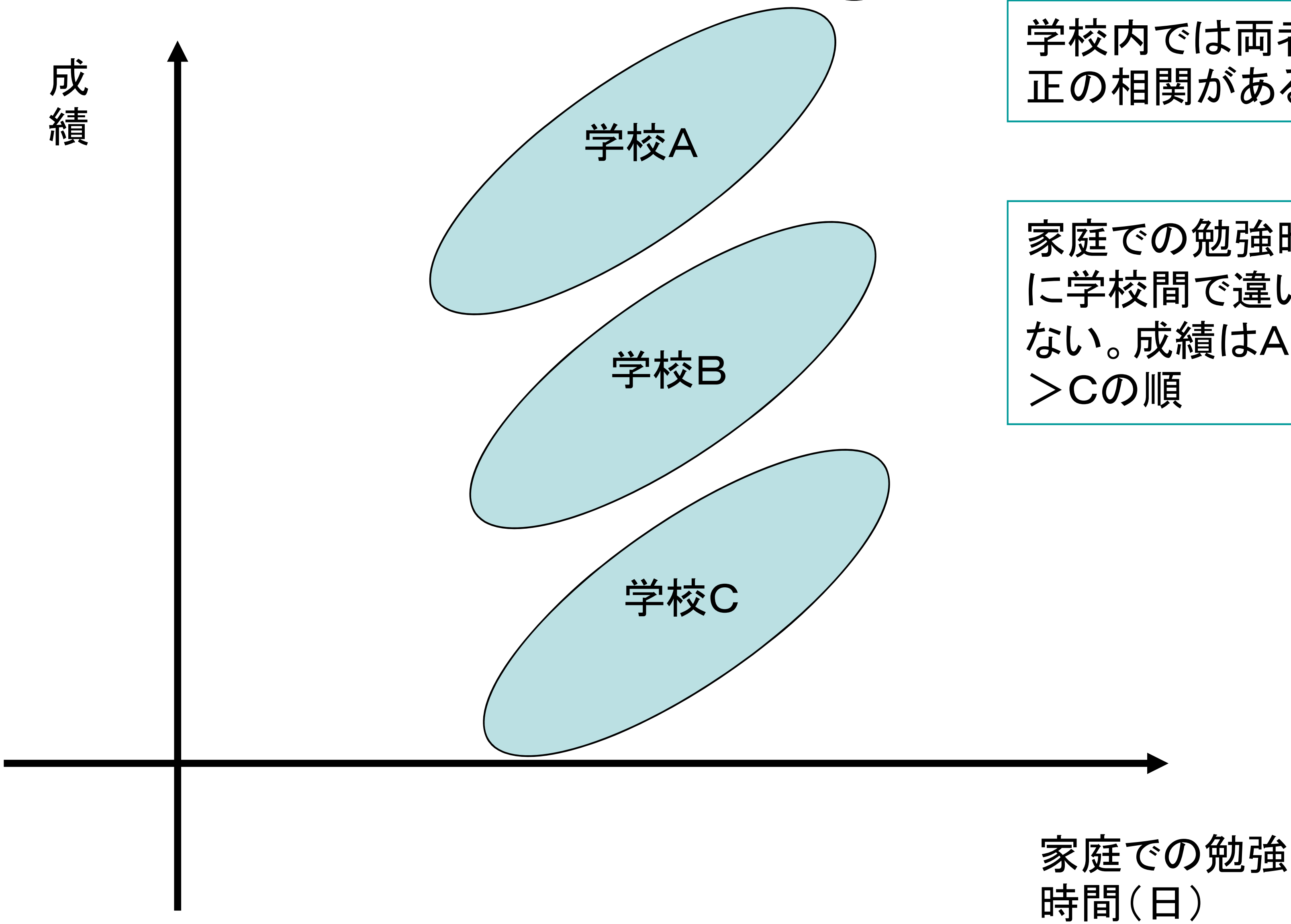
マルチレベルモデルが
必要な理由

散布図例①

家庭での勉強時間と成績は無関係（無相関）？



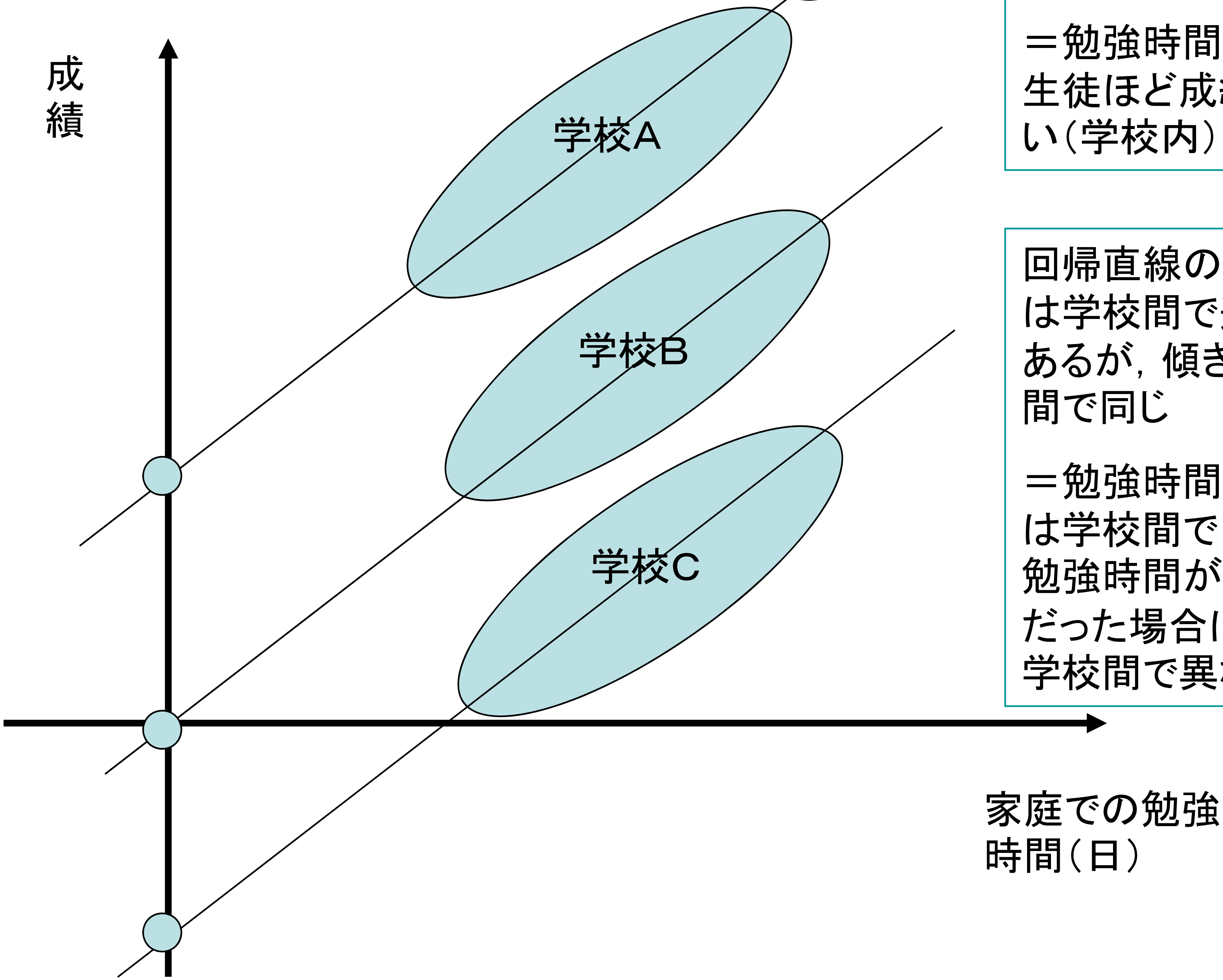
散布図例②



学校内では両者に正の相関がある

家庭での勉強時間に学校間で違いはない。成績はA＞B＞Cの順

散布図例②



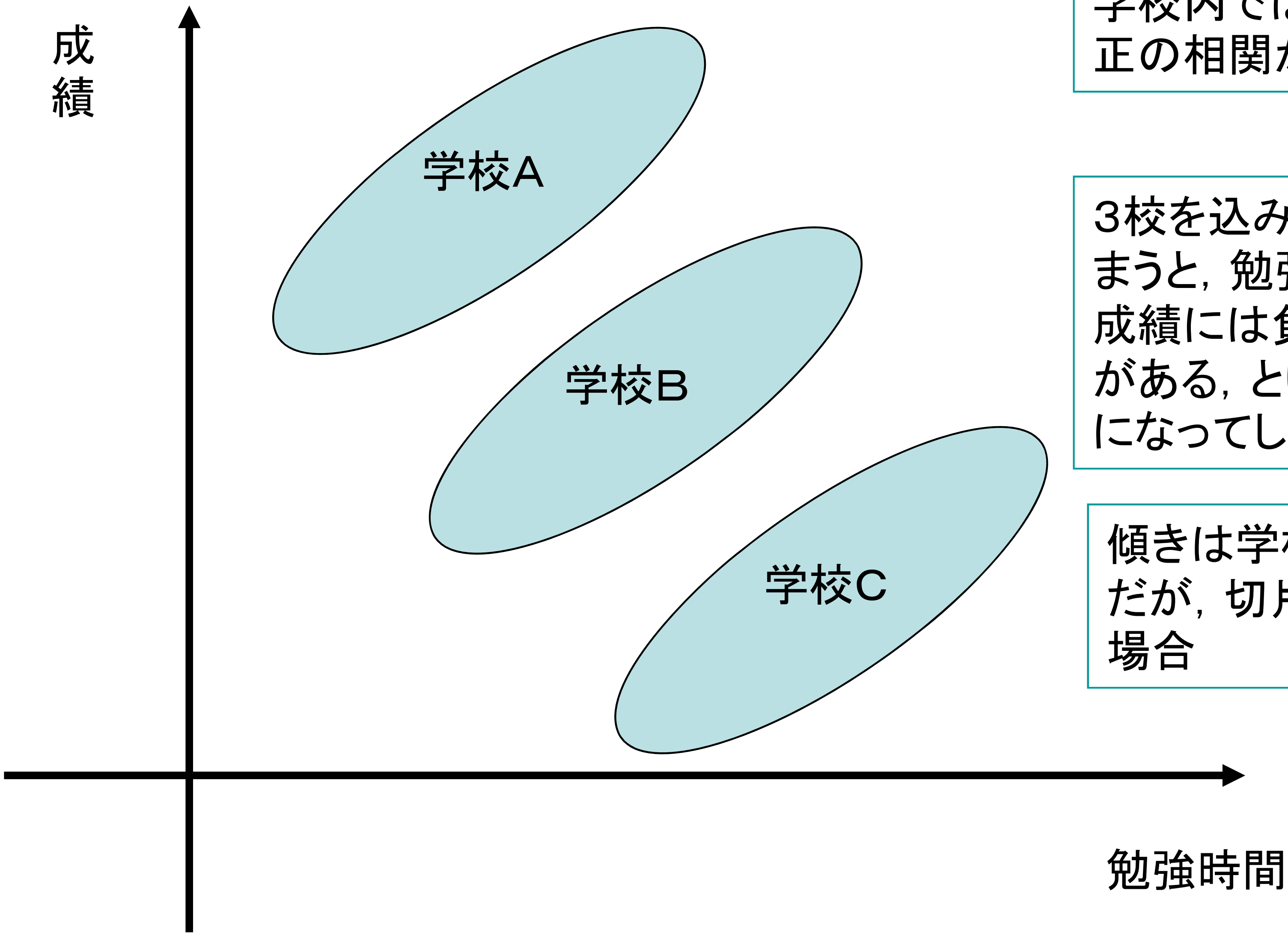
回帰直線の傾きは正

＝勉強時間の長い生徒ほど成績がよい(学校内)

回帰直線の切片には学校間で違いがあるが，傾きは学校間で同じ

＝勉強時間の効果は学校間で同じだが，勉強時間が0時間だった場合に成績は学校間で異なる。

散布図例③

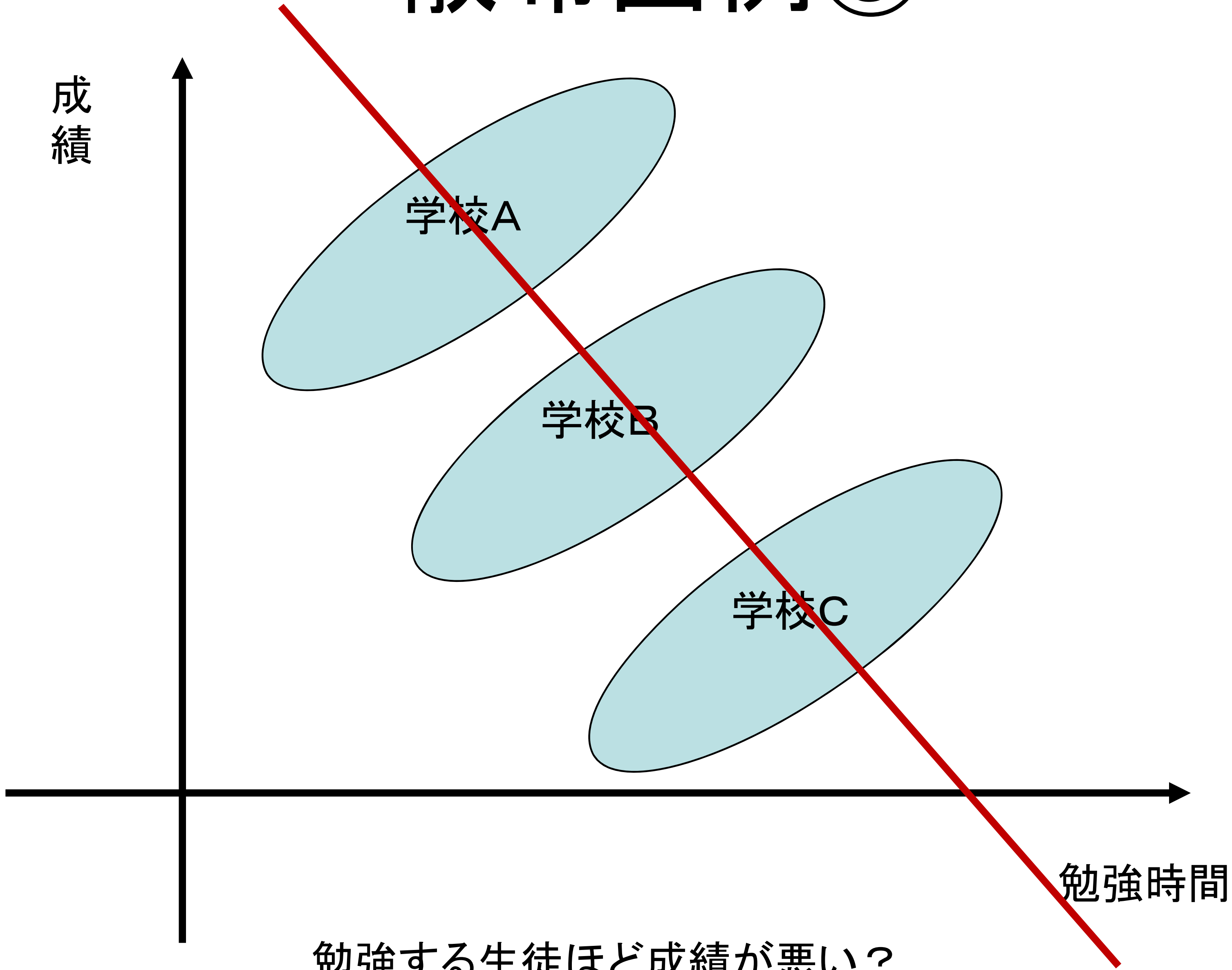


学校内では両者に正の相関がある

3校を込みにしてしまうと，勉強時間と成績には負の相関がある，という結果になってしまう

傾きは学校間で同じだが，切片は異なる場合

散布図例③



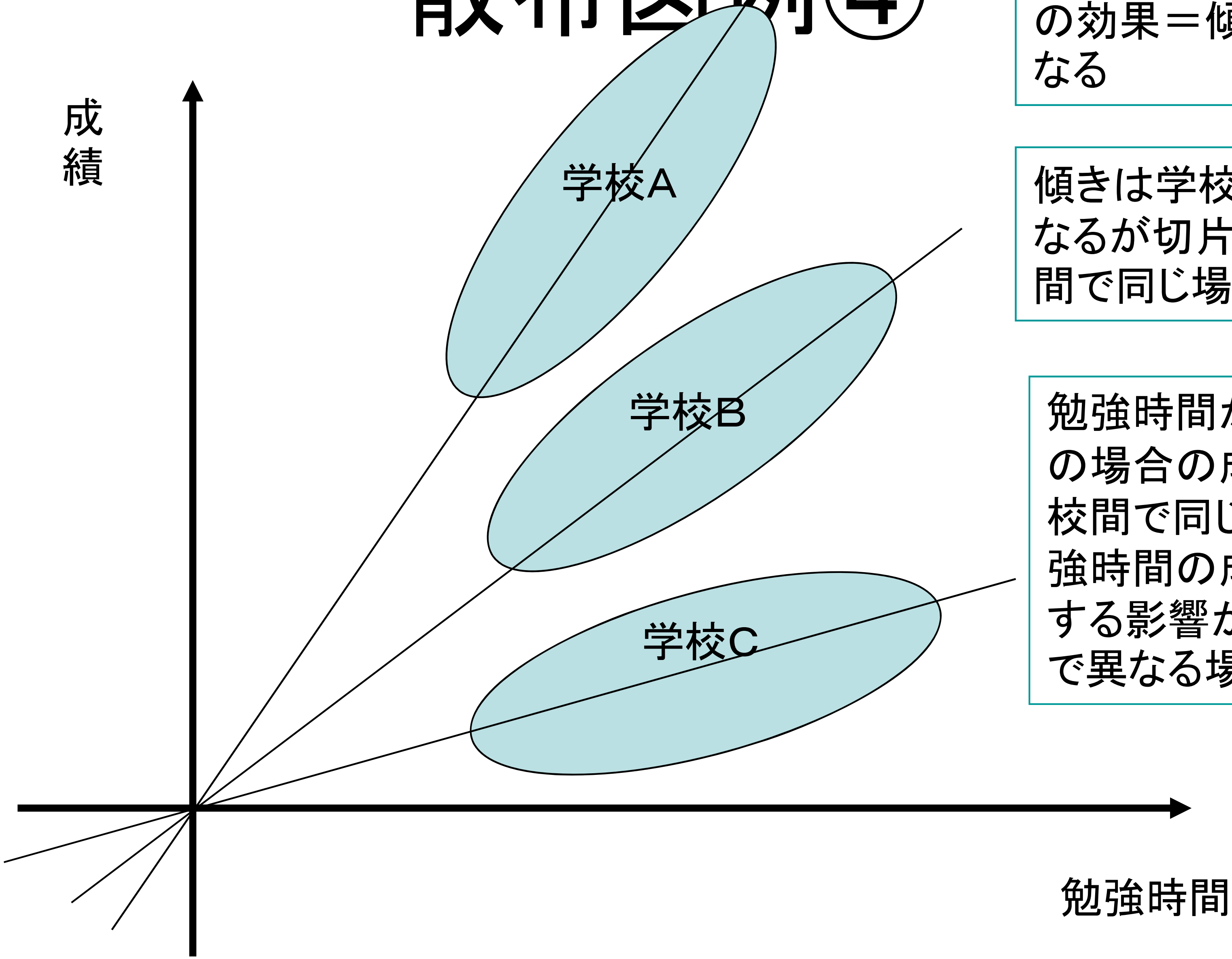
勉強する生徒ほど成績が悪い？

散布図例④

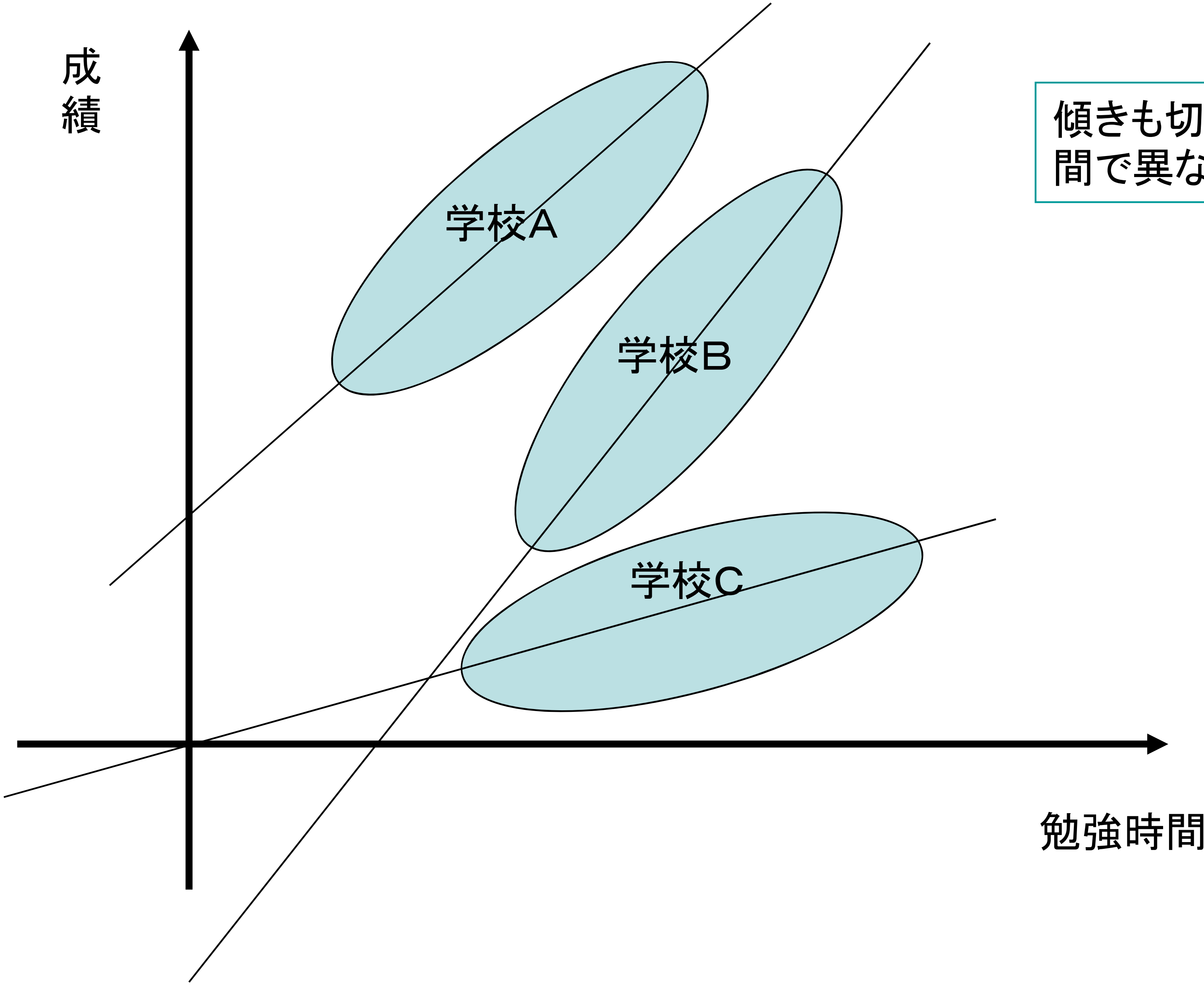
学校間で勉強時間の効果＝傾きが異なる

傾きは学校間で異なるが切片は学校間で同じ場合

勉強時間が0時間の場合の成績は学校間で同じだが，勉強時間の成績に対する影響が学校間で異なる場合

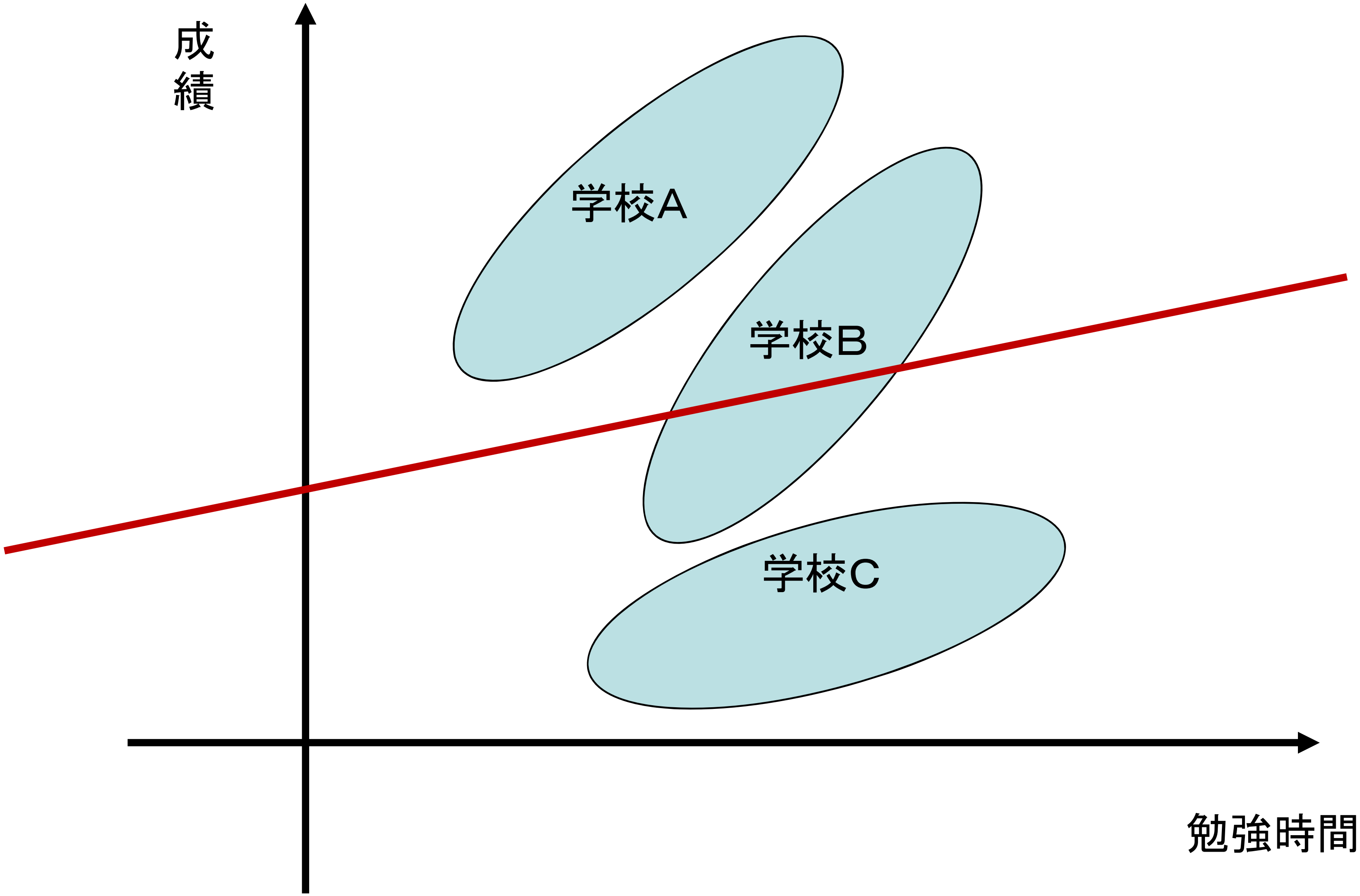


散布図例⑤



傾きも切片も学校間で異なる場合

散布図例⑤



散布図①･②･③･④･⑤から分かること

- 学校を込みにした（無視した）分析と，学校別の分析結果は必ずしも一致するとは限らない
- 逆の結果を導くこともあり得る
- 従って，学校間の違いと学校内（生徒間）の違いを区別した分析を行うべきである

⇩

マルチレベルモデルの必要性

マルチレベルモデルの考え方

通常の回帰分析

- 成績ｉ＝切片＋傾き×勉強時間ｉ＋誤差ｉ
- iは生徒を表す。
- 通常の回帰分析（単回帰分析，重回帰分析も含む）では，切片と傾きは単一の値しかとらない。
- 従って，切片や傾きが学校間で異なるような散布図に対しては通常の回帰分析は適切な分析方法ではない。⇒マルチレベルモデリングでは学校間で異なる切片や傾きを仮定

マルチレベルモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j＊勉強時間 ij + 誤差 ij

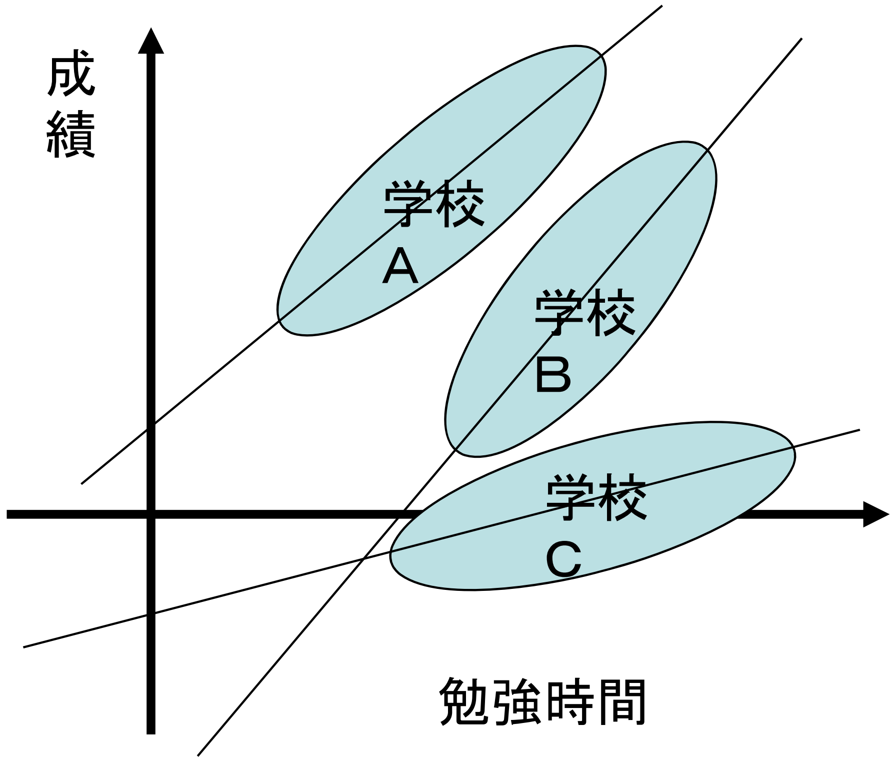
学校レベル：切片 j ＝(切片の)切片 + 誤差 $j_{切}$

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 + 誤差 $j_{傾}$

切片 j ：学校jの切片

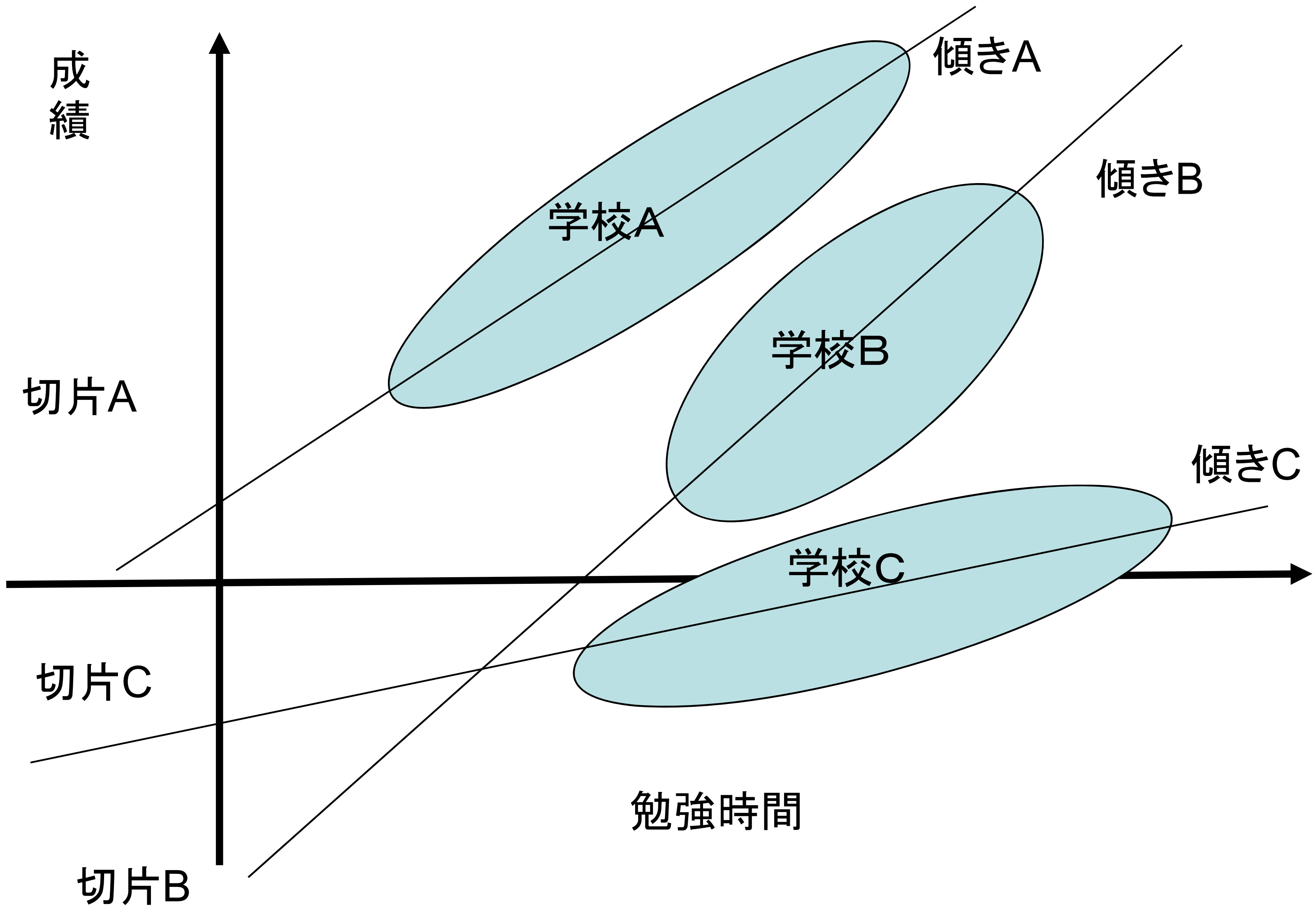
傾き j ：学校jの傾き

i は生徒
j は学校
を表す。



マルチレベルモデル（生徒レベル）

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j ＋ 傾き j ＊勉強時間 ij ＋ 誤差 ij



マルチレベルモデル（学校レベル）

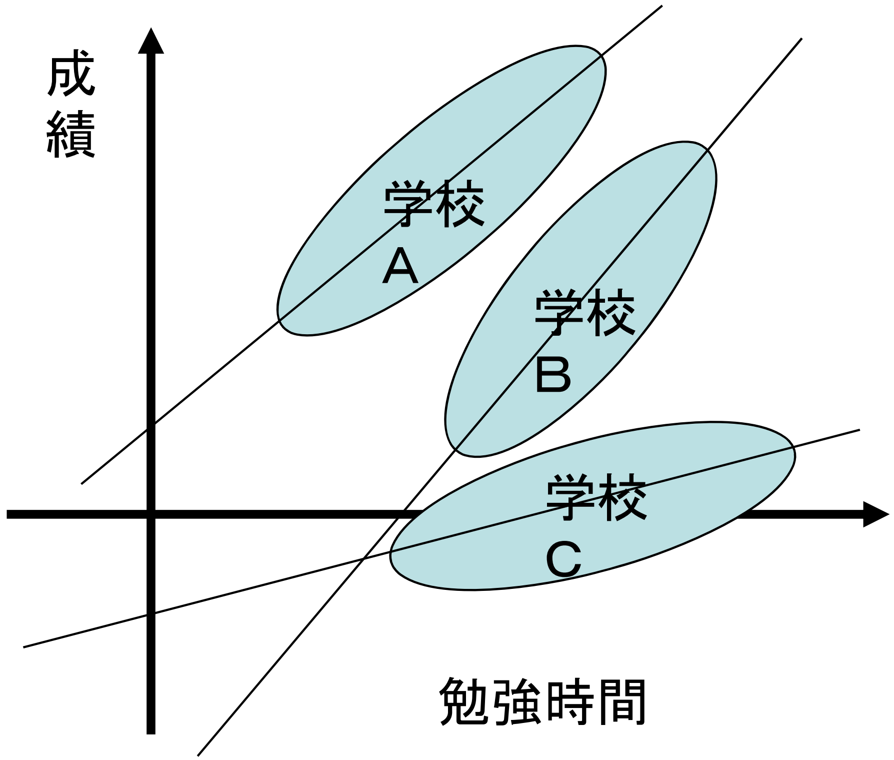
学校レベル：切片 j ＝(切片の)切片 + 誤差 $j_{切}$

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 + 誤差 $j_{傾}$

切片 j をその平均と平均からの乖離（誤差j切）に分解する。

傾き jをその平均と平均からの乖離（誤差j傾）に分解する。

切片 jや傾き jを従属変数として回帰モデルを学校レベルで実行することも可能。
例：学校の規模は勉強時間が成績に与える影響に影響するだろうか？



２つのキーワード

- マルチレベルモデル
  - 多段抽出によって集められたデータに対する適切な分析手法
- 独立変数の中心化

単回帰分析

$$y = \beta + \alpha x + e$$

βは，Xが0のときのyの期待値

X(独立変数)を中心化すると

$$y = 0 + \alpha(x - \bar{x}) + e$$

βは，Xがその平均と等しいときのyの期待値

βの解釈が変化した！
マルチレベルモデルにおいては中心化がどのような影響を与えるのだろうか？

このWSで取り上げる問題

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j＊勉強時間 ij + 誤差 ij

「勉強時間ij」の中心化方法はいかにすべき？

中心化方法がどのような影響を推定値・解釈に与えるのか？

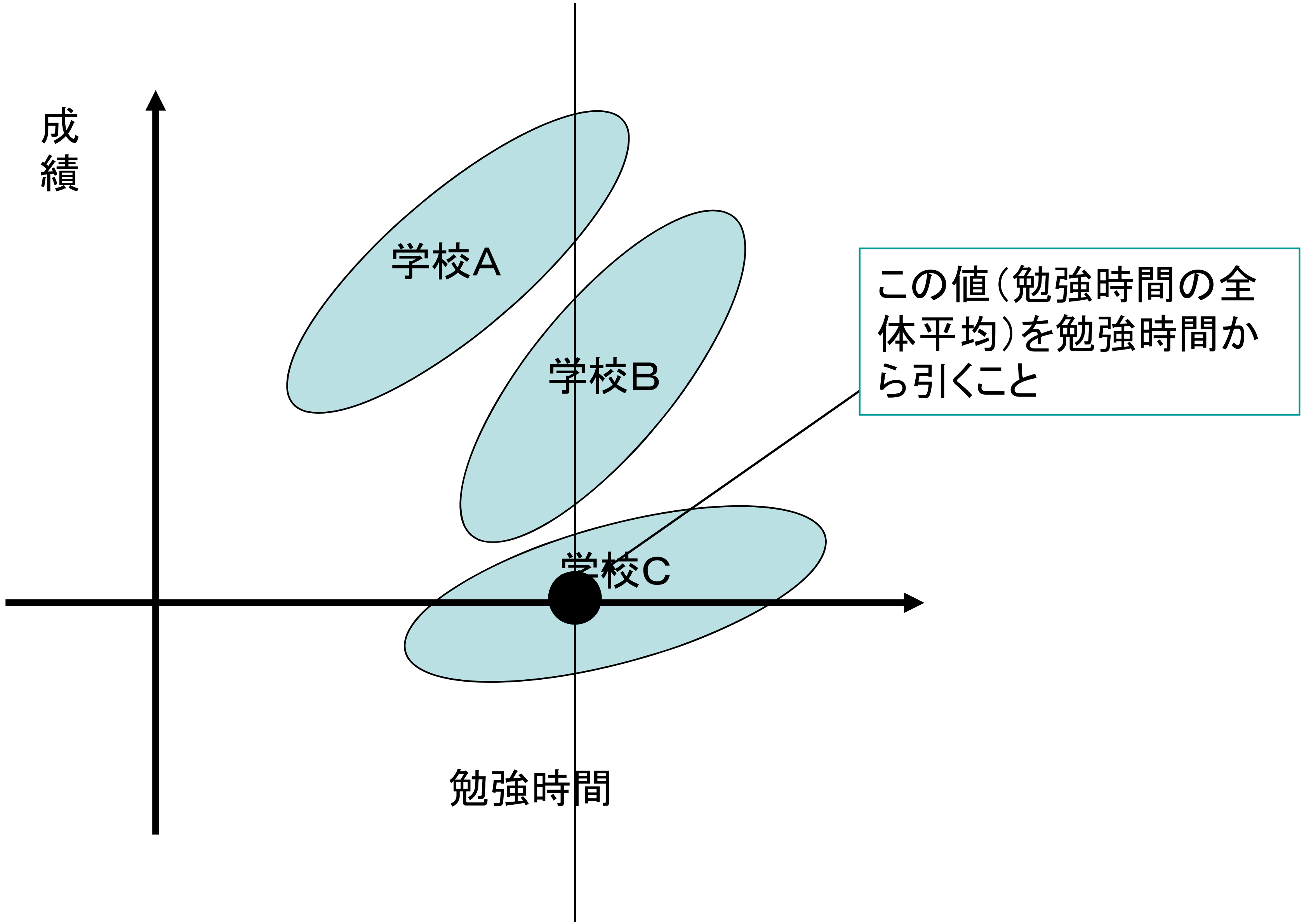
・全平均による中心化(centering using mean, CGM)

・学校ごとの平均による中心化（centering within cluster, CWC）

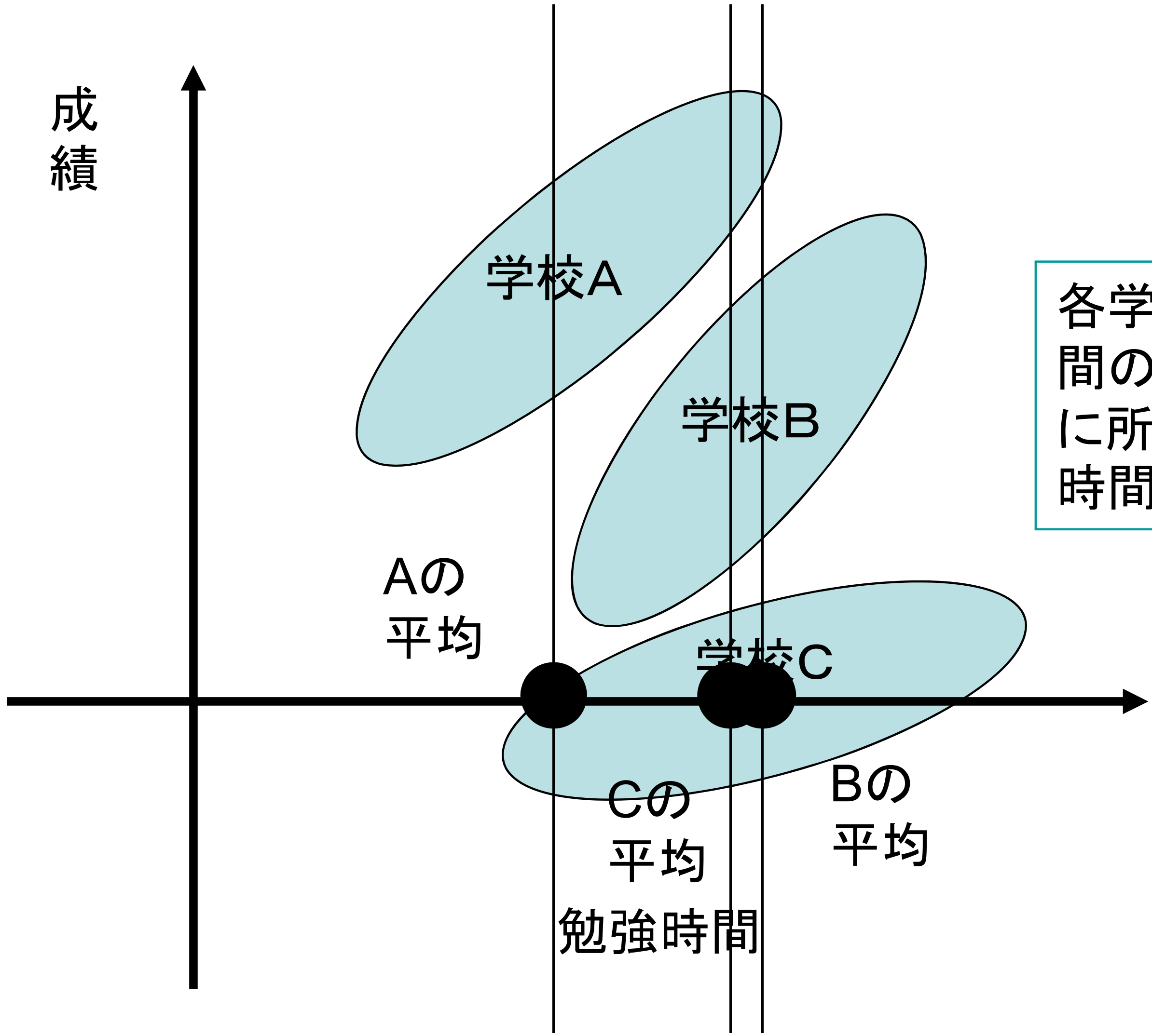
「勉強時間ij」の中心化は，切片のみならず，傾きにも影響を与える。

地味ではあるが重要な問題

全体平均で中心化



グループ平均で中心化



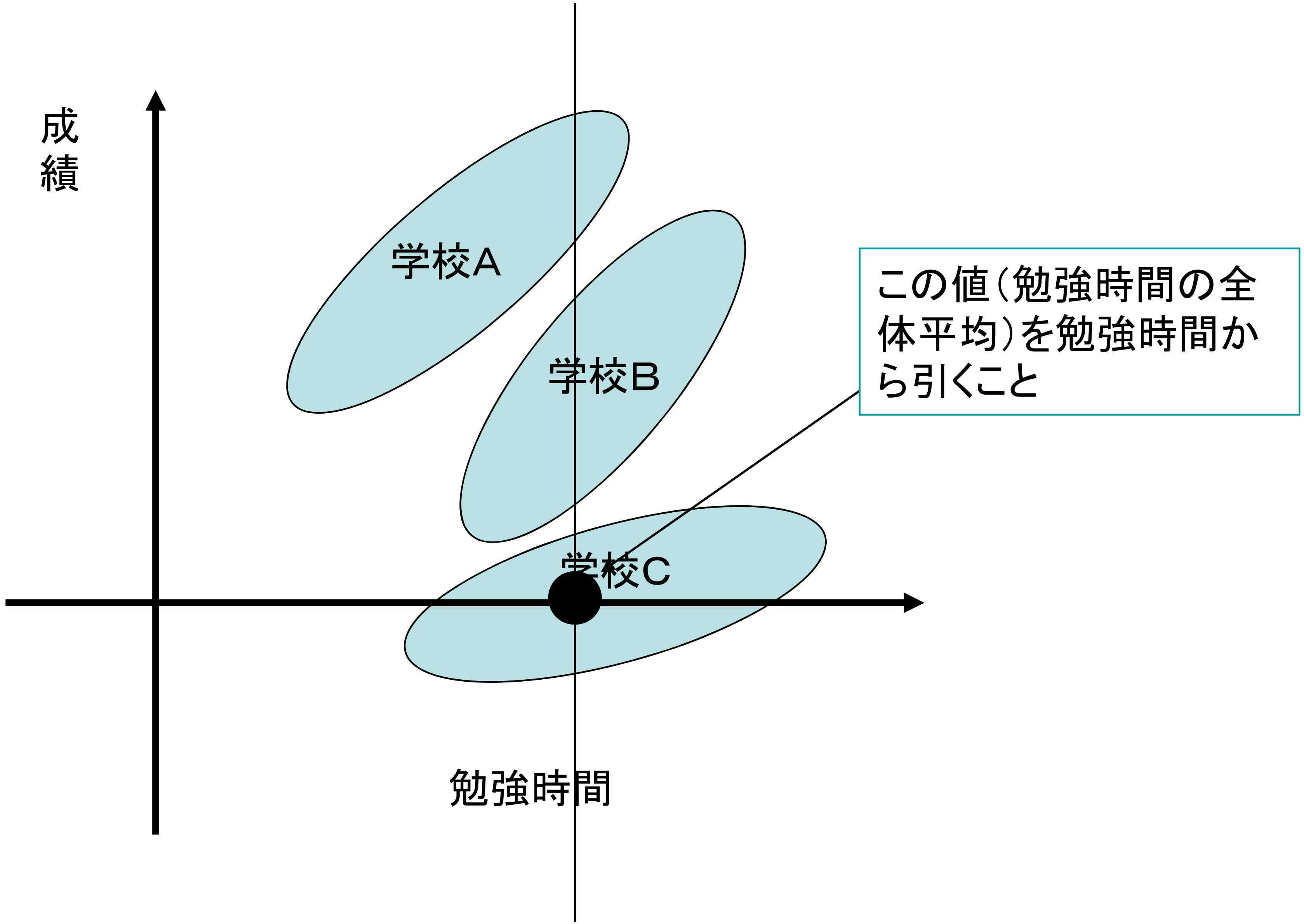
各学校における勉強時間の平均を，その学校に所属する生徒の勉強時間から引くこと

切片 j の解釈

- 全平均を引くとき：学校jの中にいる，勉強時間が全体平均と同じ生徒の成績の期待値
- 学校平均を引くとき：学校 j の勉強時間の平均と同じ（学校 j に所属する）生徒の成績の期待値

傾きjの解釈は？

全体平均で中心化



全体平均で中心化(CGM)

$$\text{勉強時間}_{[CGM]ij} = \text{勉強時間}_{ij} - \text{勉強時間の全平均}$$

$$= \underline{(\text{勉強時間}_{ij} - \overline{\text{勉強時間}}_{j})}$$

$$+ \underline{(\overline{\text{勉強時間}}_{j} - \text{勉強時間の全平均})}$$

全平均で中心化した場合には，勉強時間[cgm]ijは，

生徒レベルの変動 $(\text{勉強時間}_{ij} - \overline{\text{勉強時間}}_{j})$

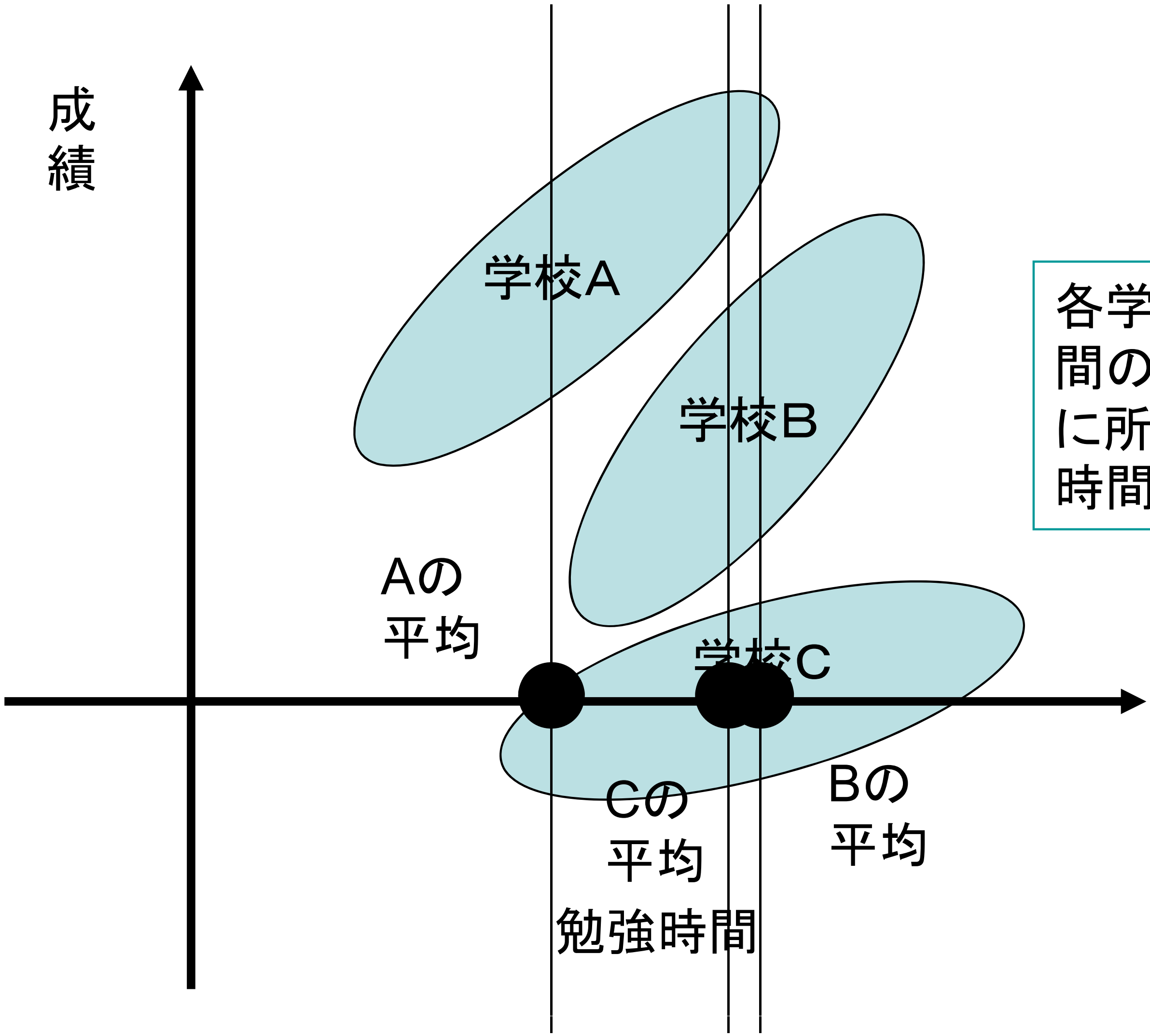
と

学校レベルの変動 $(\overline{\text{勉強時間}}_{j} - \text{勉強時間の全平均})$

の両者を有することになるので，傾きjの解釈は一般には困難である。

成績 ij ＝切片 j + 傾き j * 勉強時間[cgm] ij + 誤差 ij

グループ平均で中心化



各学校における勉強時間の平均を，その学校に所属する生徒の勉強時間から引くこと

学校平均で中心化(CWC)

$$\text{勉強時間}_{[CWC]ij} = \text{勉強時間}_{ij} - \overline{\text{勉強時間}}_{j}$$

学校平均で中心化した場合には，勉強時間[cwc]ijは，

学校j内の生徒の相対的な勉強時間の違いを表す（生徒レベルの変動）。

したがって，傾きjは生徒レベルにおける勉強時間と成績の回帰係数となる。

成績 ij ＝切片 j + 傾き j * 勉強時間[cwc] ij + 誤差 ij

CGMとCWCの違い

- CGM：生徒レベルの独立変数は生徒レベルの変動と学校レベルの変動の両方を含んでいる。
- CWC：生徒レベルの独立変数は生徒レベルの変動のみを含んでいる。

使い分け

使い分(の結論)

- ①生徒レベルの独立変数の影響に関する研究→CWC
- ②学校レベルの独立変数の影響に関する研究→CGM
- ③生徒レベルの独立変数と学校レベルの独立変数の影響比較→どちらでもOK
- ④交互作用(学校レベルの変数が生徒レベルの変数間の関係を調整する)→CWC

①生徒レベルの独立変数の影響に関する研究

- 例：生徒の勉強時間が生徒の成績に与える影響を検討する。
- 成績 ij ＝切片 j + 傾き j ＊勉強時間 ij + 誤差 ij
- 学校の影響が混入してはならない。
- CWCを使うべき。
- CGMを使った場合には，回帰係数に，生徒の影響と学校の影響が混在してしまう。

①個人レベルの独立変数の影響に関する研究

- 企業から個人を抽出して
- 就業時間（独）とストレス（従）を収集した場合には，
- 企業内の就業時間の相対的な多寡がストレスにつながるか否かを検討することになる。

②学校レベルの独立変数の影響に関する研究

- 例：学校の規模が成績の学校平均に与える影響を検討したい。

- 切片j ＝（切片の）切片 + γ＊（規模j）+ 誤差 $j_{切}$

- 規模の影響をみるときに，生徒レベルの変数の影響は排除しておきたい（混入して欲しくない）。

②学校レベルの独立変数の影響に関する研究

- CGMを使うべき。
- 方程式をまとめると以下のようになる。
- 成績ij = (切片の)切片＋γ＊(規模j)+傾きの切片*(勉強時間[cgm]ij)+残差

- 勉強時間[cgm]ij は生徒レベルの変動と学校レベルの変動も含んでいるので，規模jの影響γはそれらを統制した上での，規模の影響となる。

②学校レベルの独立変数の影響に関する研究

- CWCの場合
- 成績ij = (切片の)切片＋γ*(規模j)+傾きの切片*(勉強時間[cwc]ij)+残差

- 勉強時間[cwc]ij は生徒レベルの変動のみを含み，学校レベルの変数（規模j）とは無相関なので，規模jの影響γは，生徒レベルの影響が排除されないまま求められた推定値となってしまう。

③生徒レベルの独立変数と学校レベルの独立変数の影響比較

- 例:勉強時間から成績への影響は生徒レベルと学校レベルのどちらの方が大きいだろうか？

- 生徒レベルの影響
  - 成績 ij ＝切片 j + 傾き j * 勉強時間 ij + 誤差 ij

- 学校レベルの影響
  - 切片 j ＝(切片の)切片 +（切片に対する）傾き j * $\overline{\text{勉強時間}}$ j＋誤差 $j_{\text{切}}$

③生徒レベルの独立変数と学校レベルの独立変数の影響比較

- どちらの方法で中心化してもよい。
  - (cgmの)（切片に対する）傾き j＝(cwcの)（切片に対する）傾き j―(cwcの)傾きj
  - という変換式がある。
- CWCの場合は，傾き jと（切片に対する）傾き j を等値としたモデルと自由推定させたモデルで適合度比較を行えばよい。
- CGMの場合は，（切片に対する）傾き jが0か否かの検定を行えばよい。

④交互作用に興味がある場合

- 交互作用：学校レベルの変数が生徒レベルの変数間の関係を調整する
- 例：学校レベルの変数（規模）が生徒レベルにおける勉強時間と成績の関係を調整する。
  - 規模が大きいほど，関係が弱まるだろうか？
- 成績ij=α＊(規模j)(勉強時間ij)+残差

④交互作用に興味がある場合

- CWCを使うべき
- 成績ij=α＊(規模j)(勉強時間[cwc]ij)+残差
- 勉強時間[cwc]ijは，生徒レベルの変動のみを含むので，「学校レベルの変数が生徒レベルの変数間の関係を調整する」という関係を表現することになるから。

参考文献

- Enders, C. K., & Tofighi, D. (2007). Centering predictor variables in cross-sectional multilevel models: a new look at an old issue. Psychological Methods, 12(2), 121-138.

- 狩野・三浦(2002). 「グラフィカル多変量解析--目で見る共分散構造分析--」, 現代数学社.

- Kreft, I. G. G., de Leeuw, J., & Aiken, L. S. (1995). The effect of different forms of centering in hierarchical linearmodels. Multivariate Behavioral Research, 30, 1-21.

- 尾崎幸謙. (2009). 豊田秀樹編著. 「共分散構造分析--実践編--」(マルチレベル・潜在曲線モデルにおける独立変数の中心化), 朝倉書店. pp.1-14.

- Raudenbush, S. W., & Bryk, A. S. (2002). Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods. (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

- 豊田秀樹.(2000). 「共分散構造分析--応用編--」, 朝倉出版.

学校の違いを無視して分析すると

- 1次抽出単位を無視して分析（生徒単位のデータとして分析）
  - データの独立性の仮定を破っている
  - 生徒間の違いだけでなく学校間の違いもデータに含まれてしまっている（共分散行列は，生徒間の共分散行列と学校間の共分散行列の重み付き和になっている）

マルチレベルモデリングの利点

切片や傾きが異なる理由を探る

- 切片や傾きが異なる理由
  - クラスの平均人数が学校間で異なるから
  - 学校種（私立・国公立）の違いによる
  - 生活習慣指導を行う程度が学校間で異なるから

- マルチレベルモデリングでは，上記のような学校レベルの変数を独立変数として，切片や傾きの学校間変動を説明することが可能

マルチレベルモデリングの利点

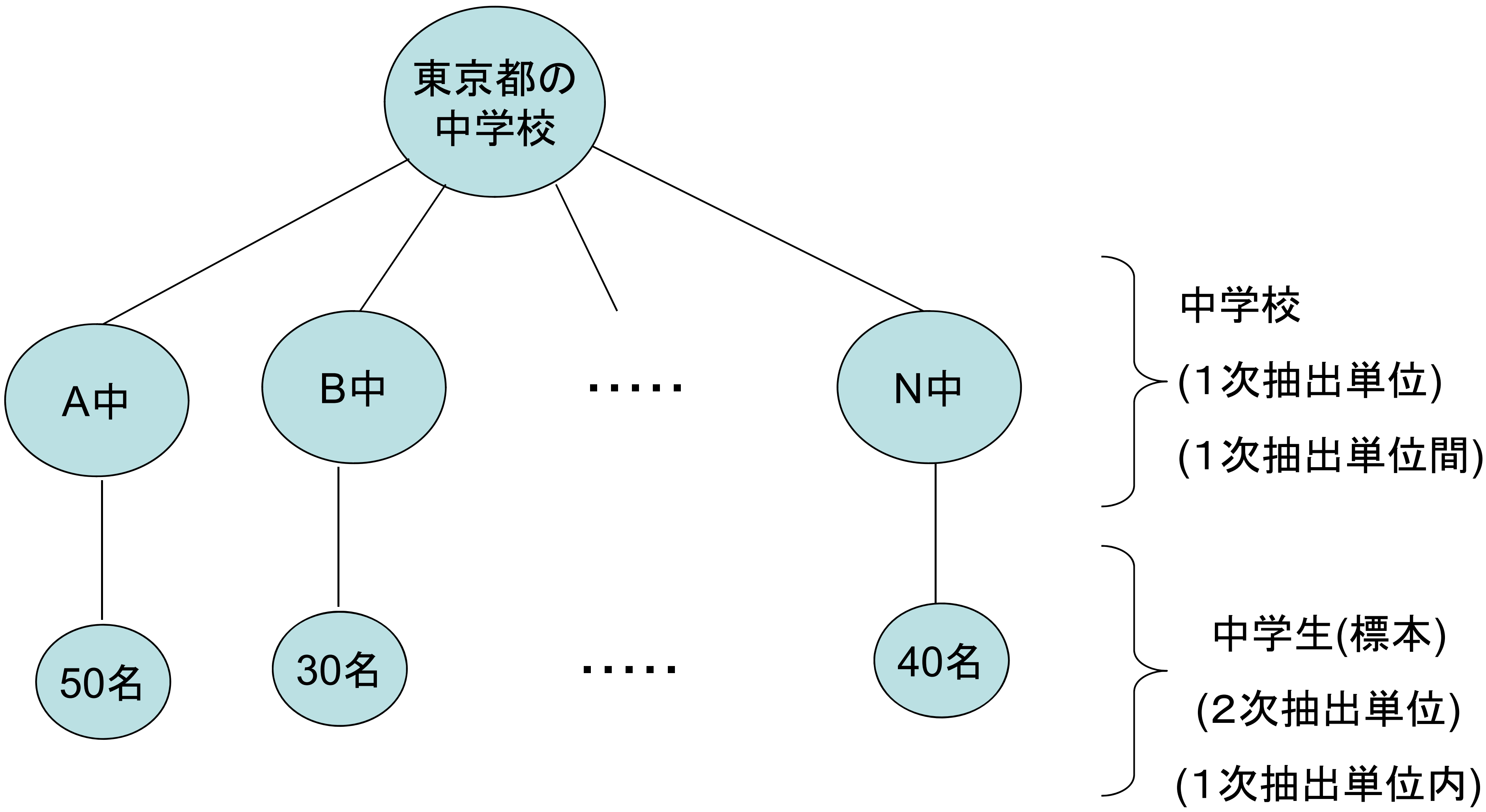
- 変数間の関係を，１次抽出単位内（学校内，生徒間）の違いと1次抽出単位間（学校間）の違いに分解し，データに対して適切な分析を行う
- 学校間の違いを従属変数として，学校レベルの変数を独立変数とした回帰分析を行うことが可能

マルチレベルモデリングとは

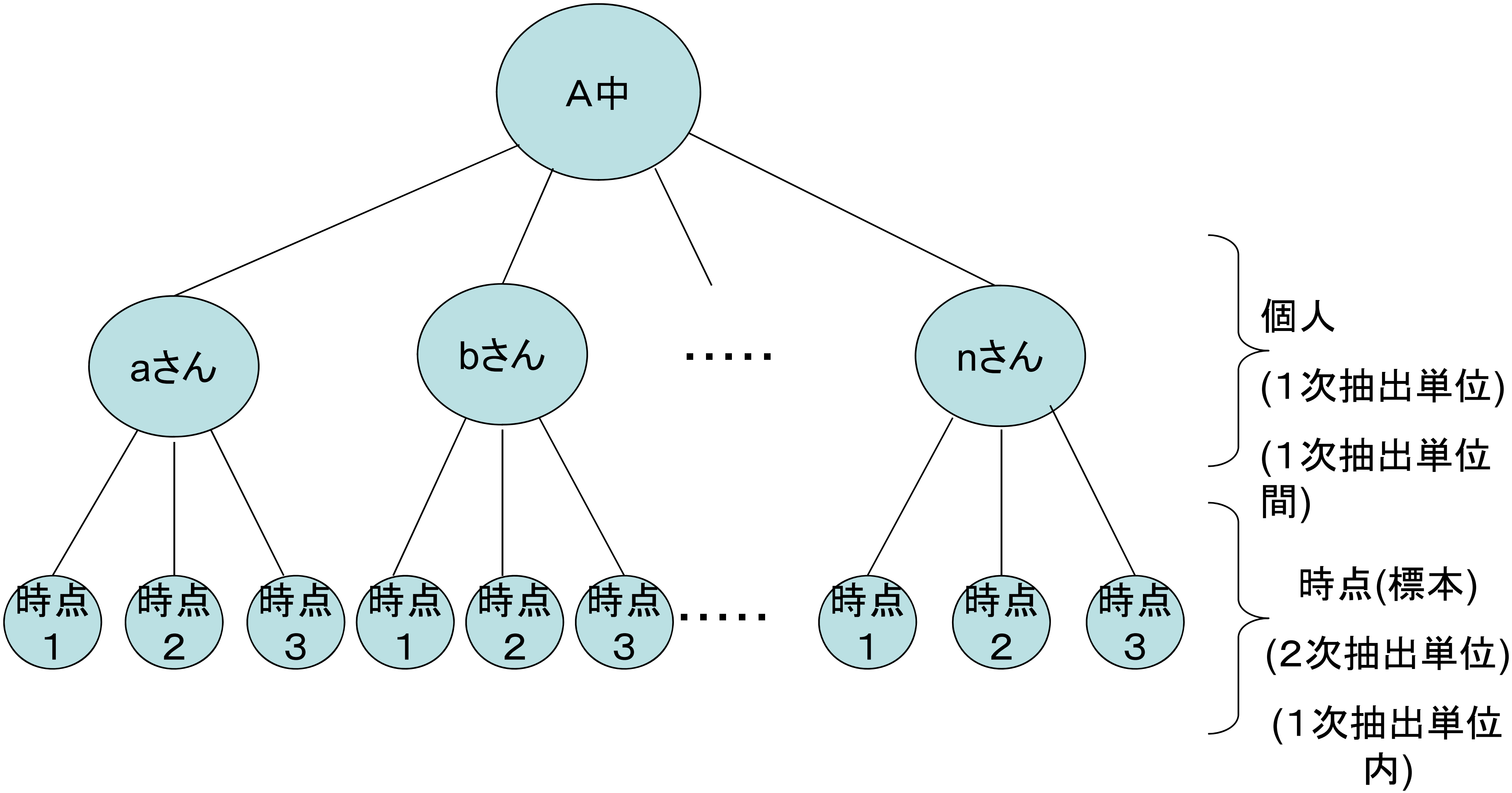
- Multilevel Linear Model：社会学
- Mixed-Effects Model and Random-Effects Model：生物統計
- Random-Coefficient Regression Model：計量経済学
- Hierarchical Linear Model：教育学

- 階層性のあるサンプルに対して，階層ごとに分析を行うための手法
  - 回帰分析
  - 因子分析

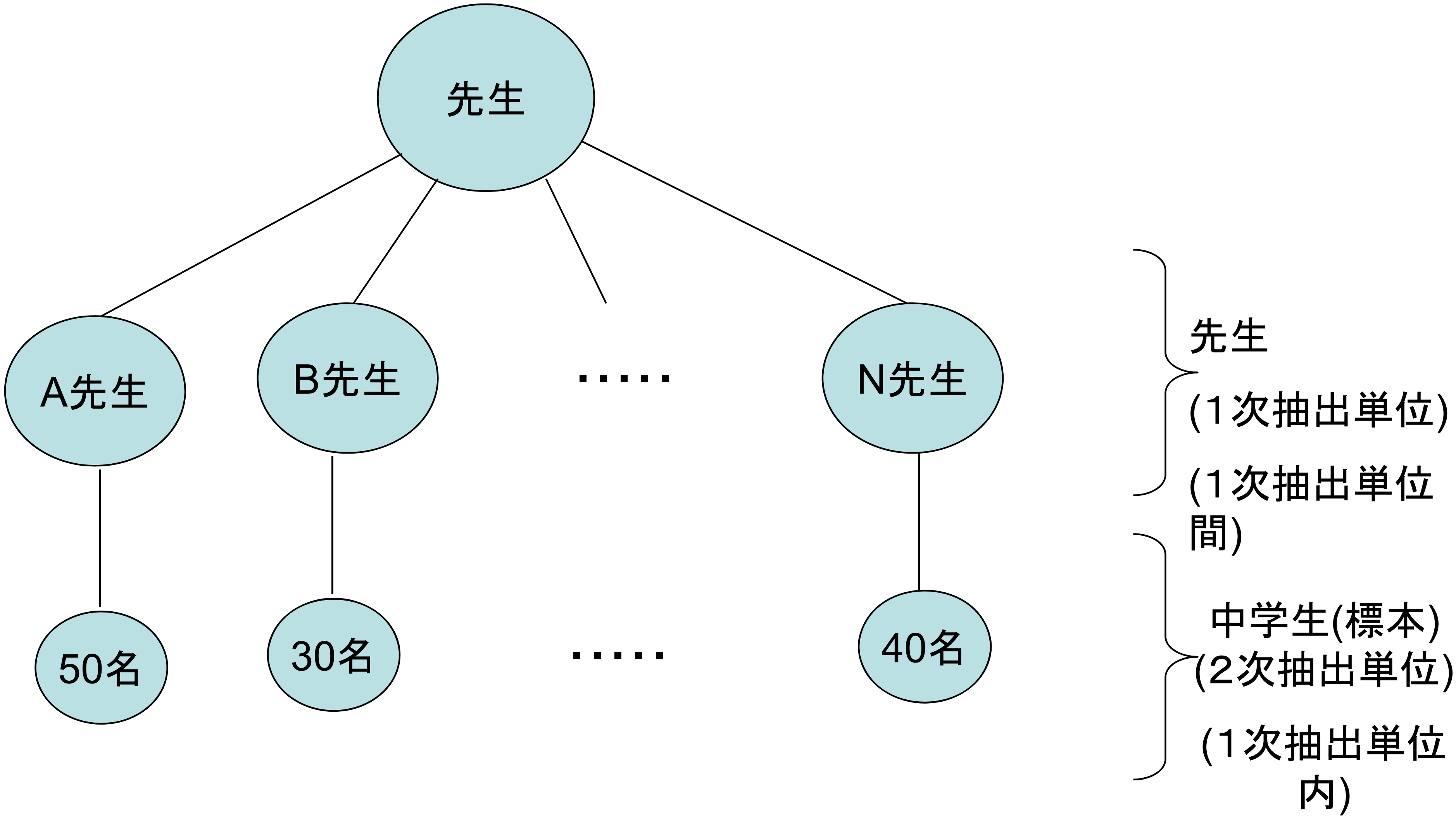
階層性のあるサンプル例①



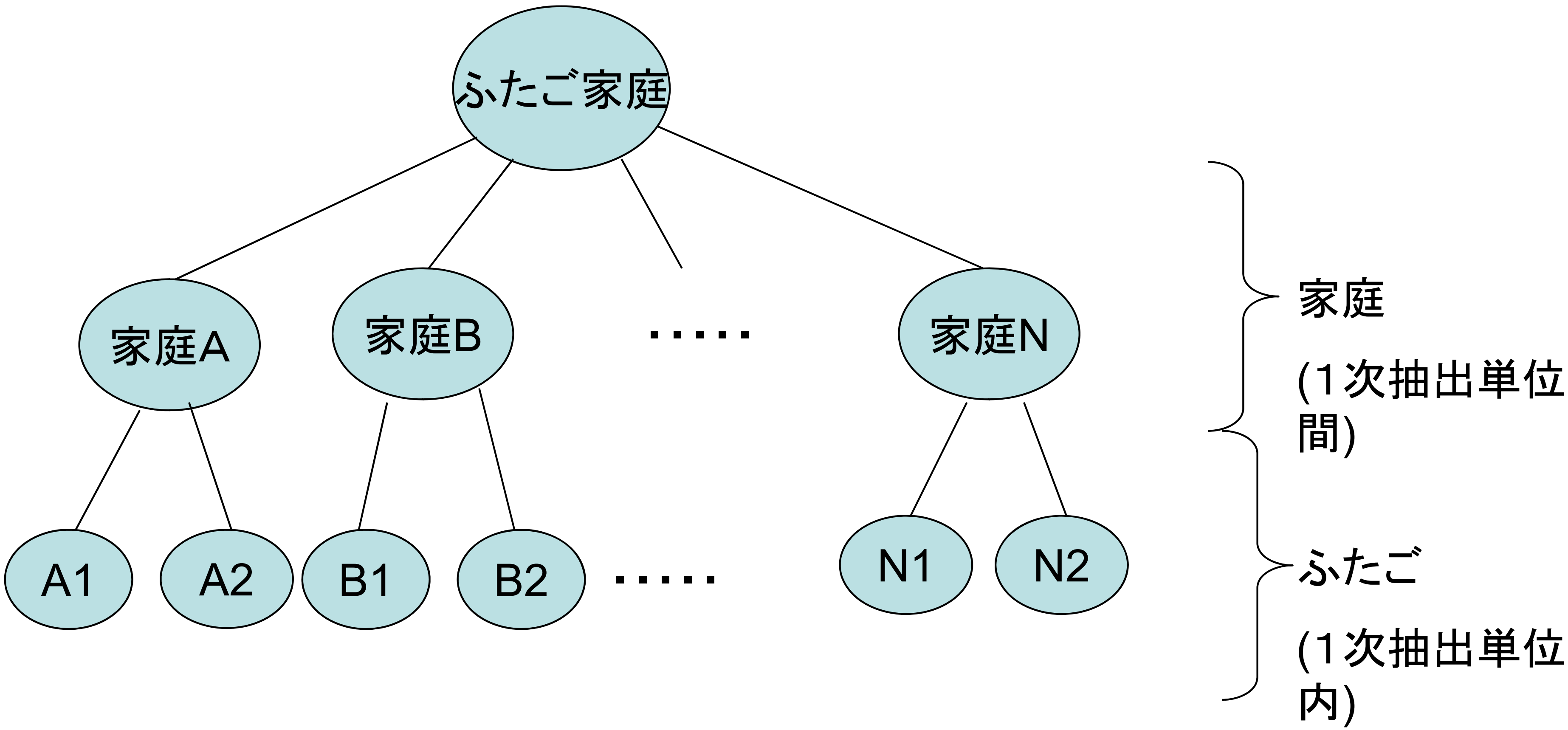
階層性のあるサンプル例②



階層性のあるサンプル例③



階層性のあるサンプル例④



学校の違いを無視して分析すると

- 1次抽出単位を無視して分析（生徒単位のデータとして分析）
  - データの独立性の仮定を破っている
  - 生徒間の違いだけでなく学校間の違いもデータに含まれてしまっている（共分散行列は，生徒間の共分散行列と学校間の共分散行列の重み付き和になっている）

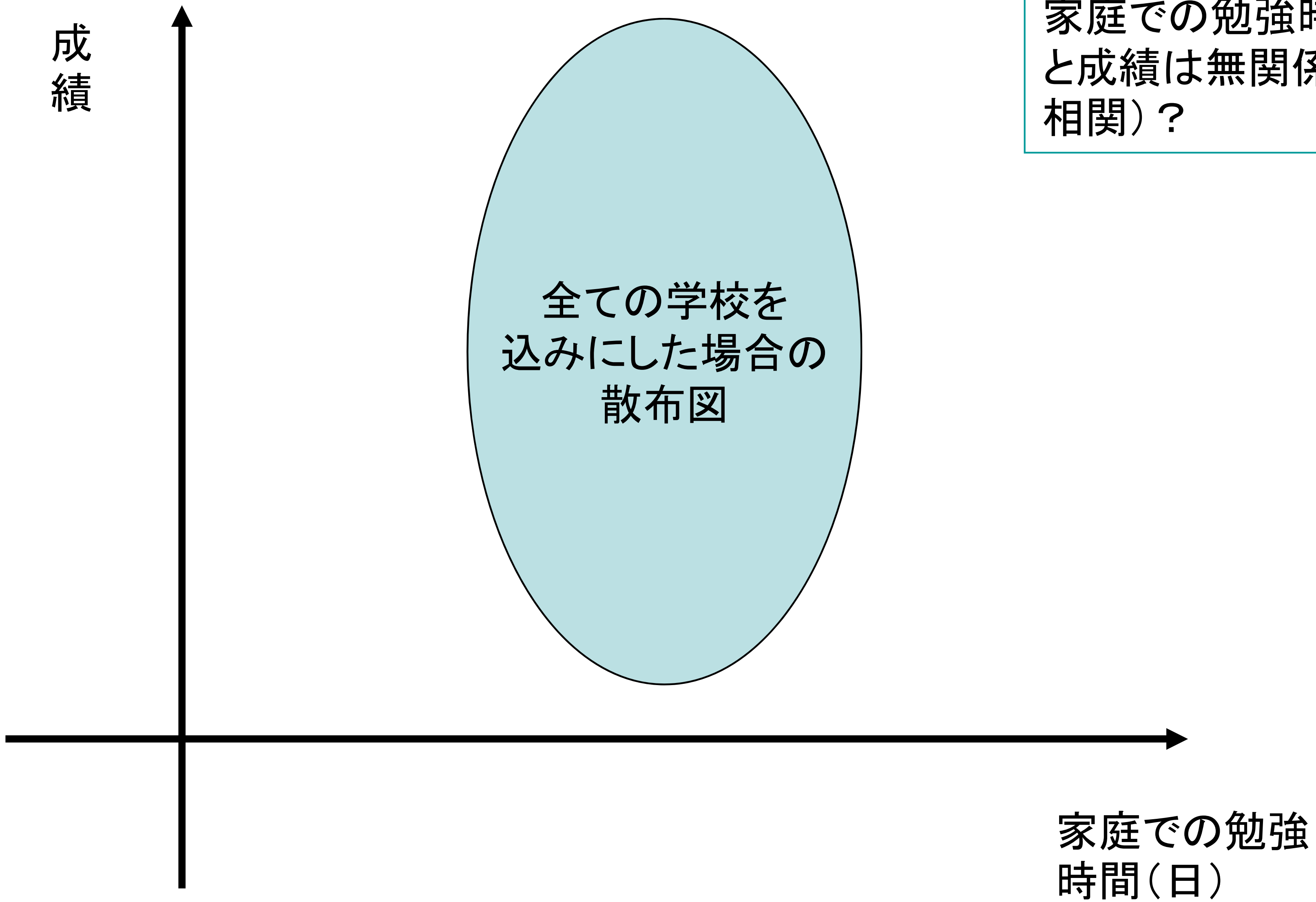
マルチレベルモデリングの利点

マルチレベル分析の利点

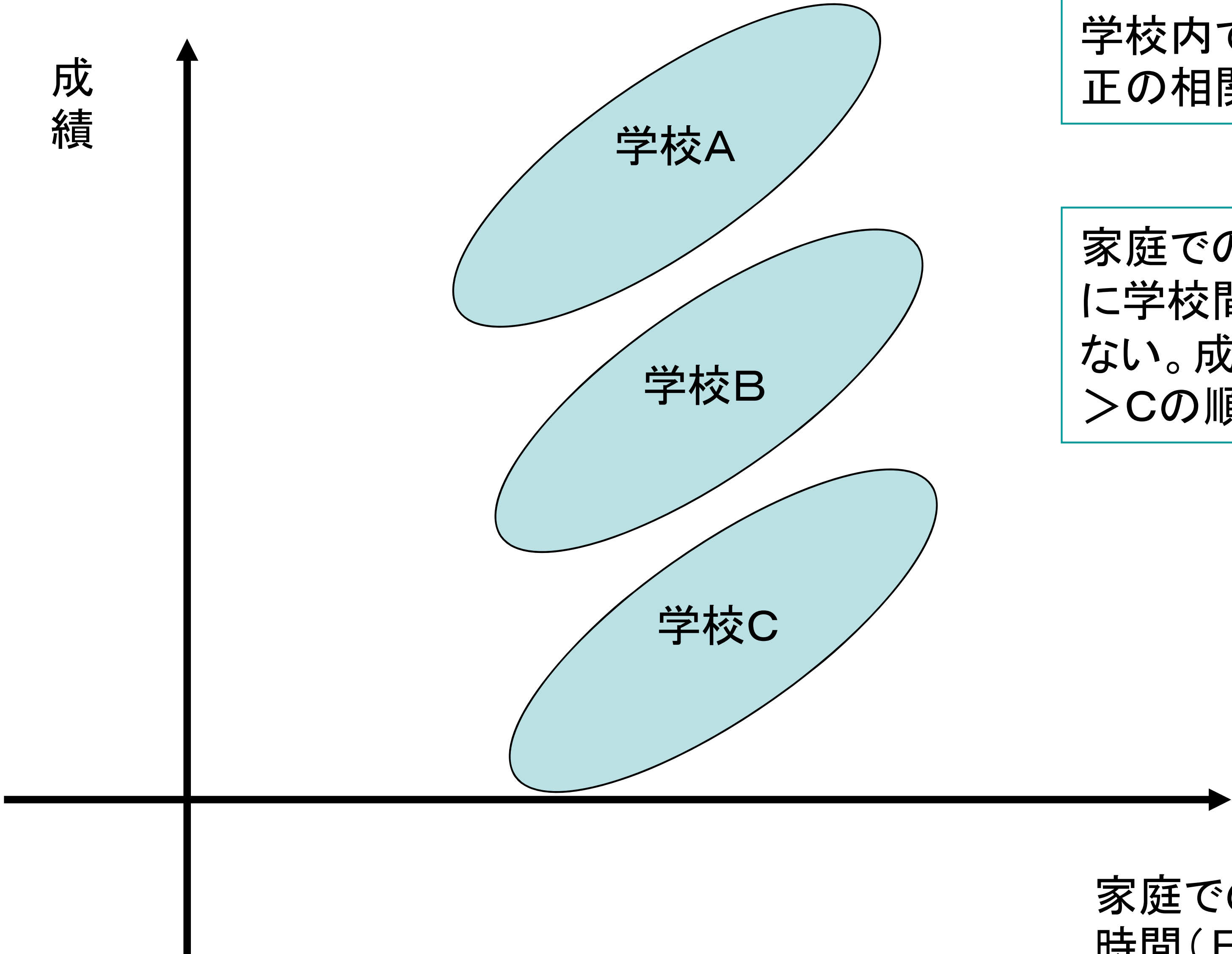
- 変数間の関係を，１次抽出単位内（学校内，生徒間）の違いと1次抽出単位間（学校間）の違いに分解し，データに対して適切な分析を行う
- 学校間の違いを従属変数として，学校レベルの変数を独立変数とした回帰分析を行うことが可能

散布図例①

家庭での勉強時間と成績は無関係（無相関）？



散布図例②

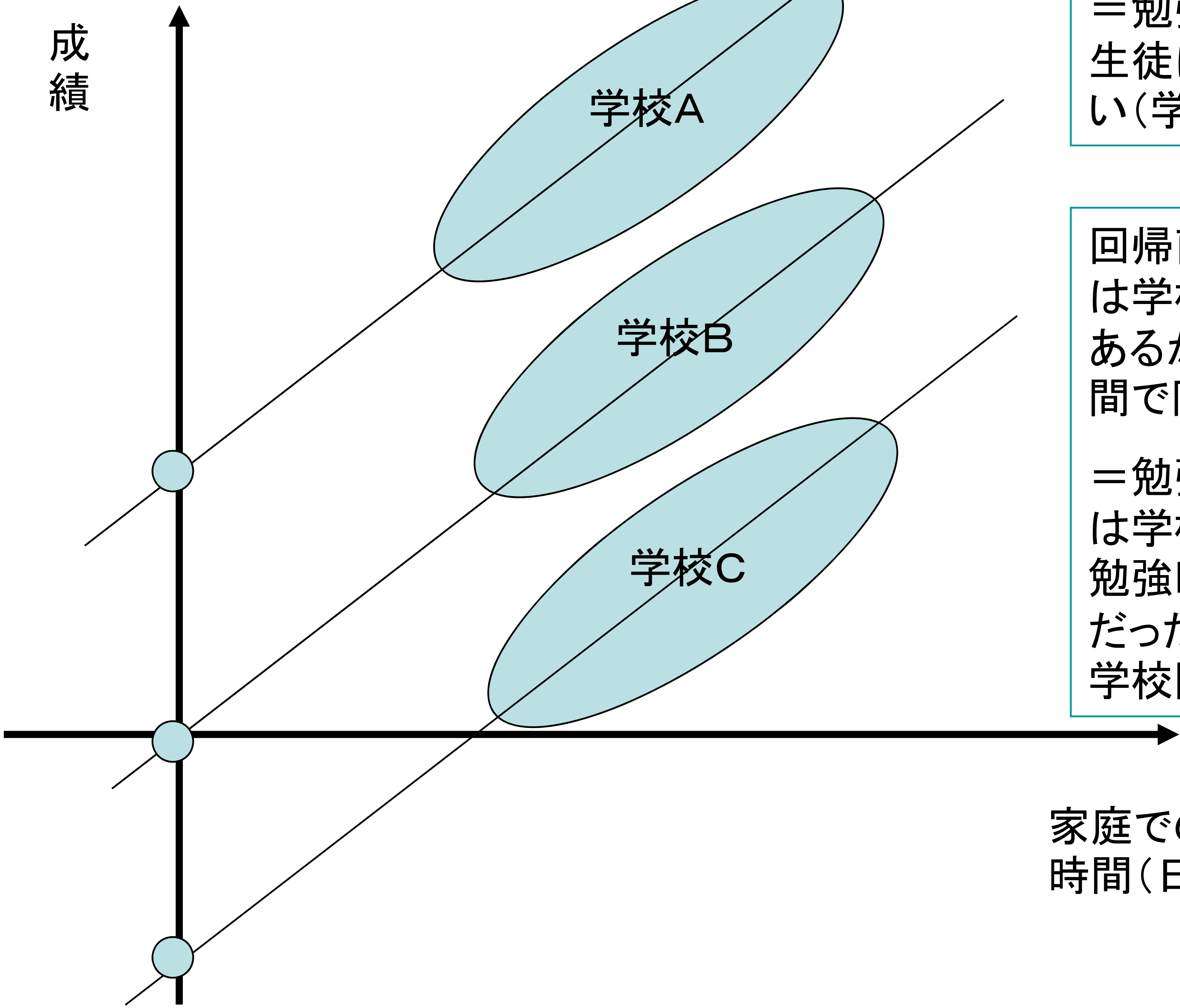


家庭での勉強時間(日)

学校内では両者に正の相関がある

家庭での勉強時間に学校間で違いはない。成績はA＞B＞Cの順

散布図例②



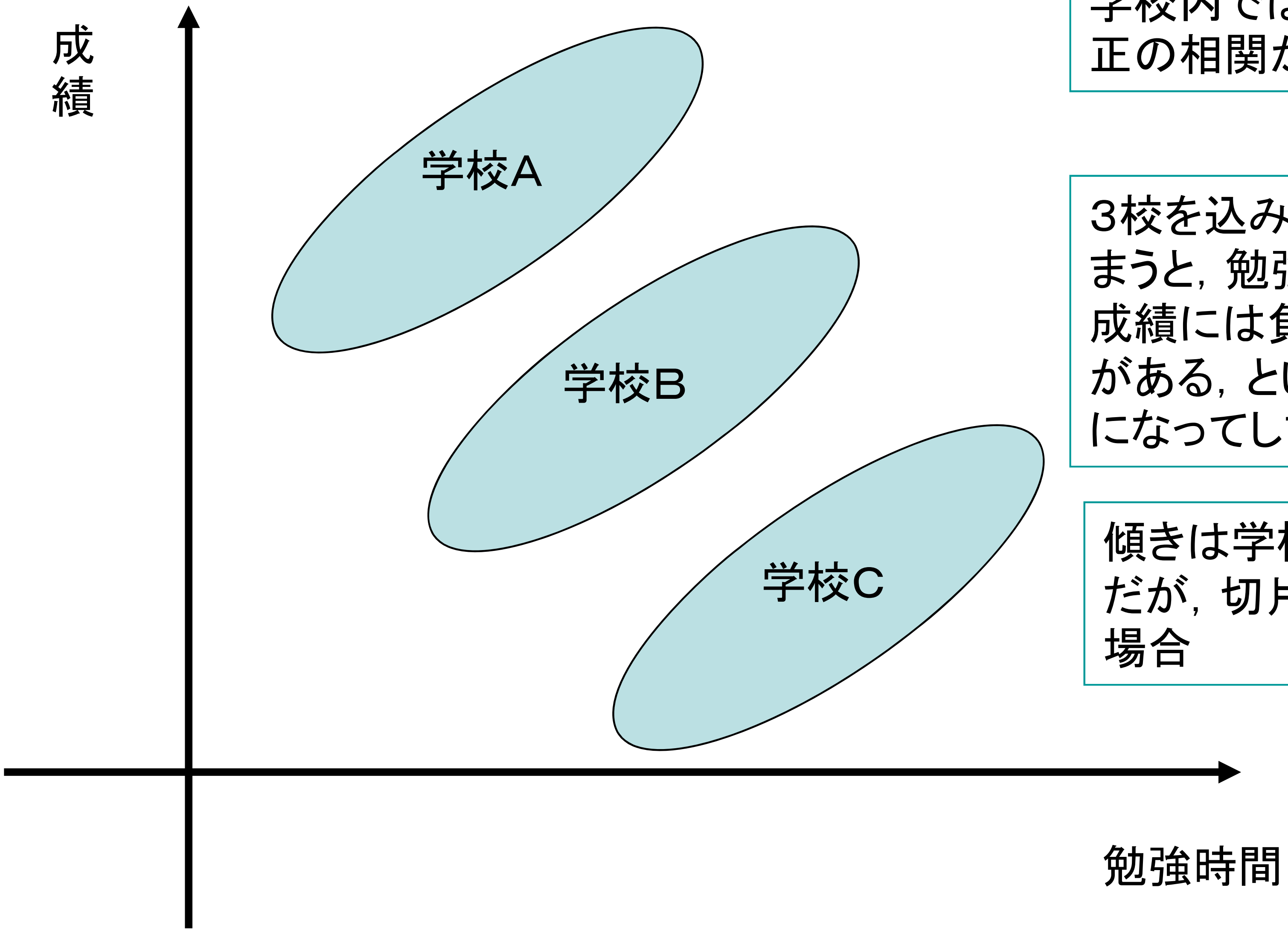
回帰直線の傾きは正

＝勉強時間の長い生徒ほど成績がよい（学校内の効果）

回帰直線の切片には学校間で違いがあるが，傾きは学校間で同じ

＝勉強時間の効果は学校間で同じだが，勉強時間が0時間だった場合に成績は学校間で異なる。

散布図例③

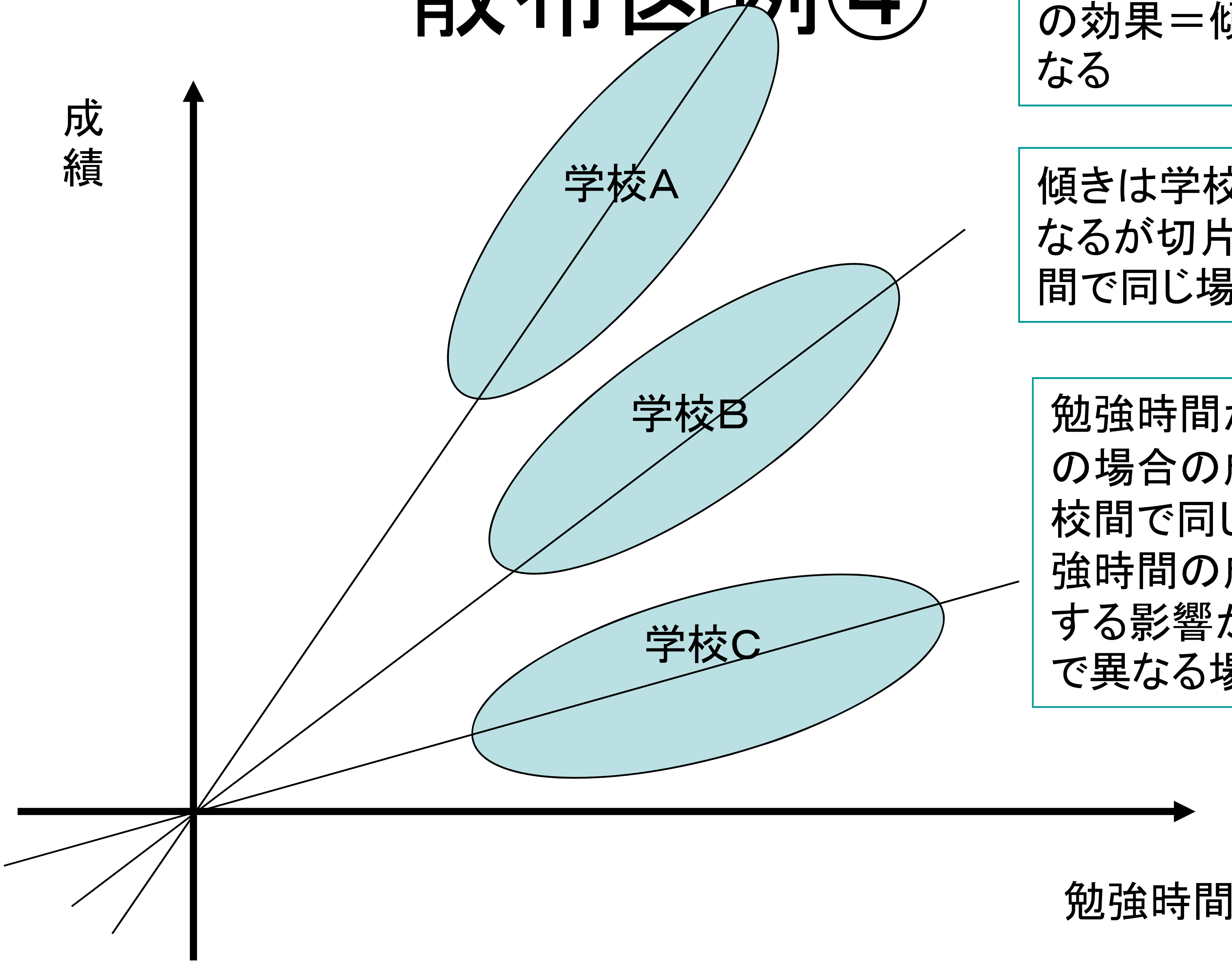


学校内では両者に正の相関がある

3校を込みにしてしまうと，勉強時間と成績には負の相関がある，という結果になってしまう

傾きは学校間で同じだが，切片は異なる場合

散布図例④

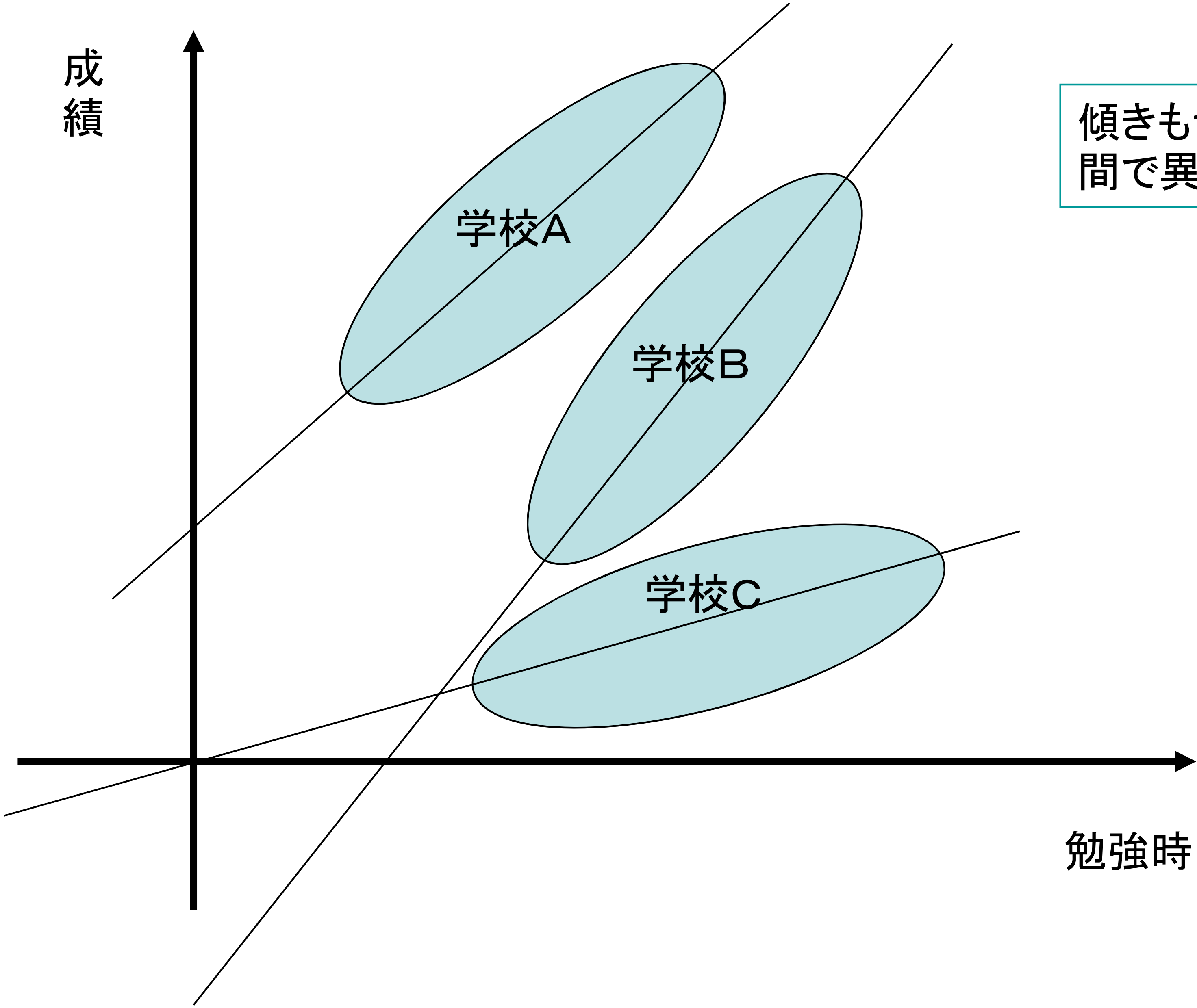


学校間で勉強時間の効果＝傾きが異なる

傾きは学校間で異なるが切片は学校間で同じ場合

勉強時間が0時間の場合の成績は学校間で同じだが，勉強時間の成績に対する影響が学校間で異なる場合

散布図例⑤



傾きも切片も学校間で異なる場合

散布図①･②･③･④･⑤から分かること

- 学校を込みにした分析と，学校別の分析結果は必ずしも一致するとは限らない
- 逆の結果を導くこともあり得る
- 従って，学校間の違いと学校内（生徒間）の違いを区別した分析を行うべきである

通常の回帰分析

- 成績ｉ＝切片＋傾き×勉強時間ｉ＋誤差ｉ
- iは生徒を表す。
- 通常の回帰分析（単回帰分析，重回帰分析も含む）では，切片と傾きは単一の値しかとらない。
- 従って，切片や傾きが学校間で異なるような散布図に対しては通常の回帰分析は適切な分析方法ではない。⇒マルチレベルモデリングでは学校間で異なる切片や傾きを推定可能

マルチレベルモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j＊勉強時間+ 誤差 ij

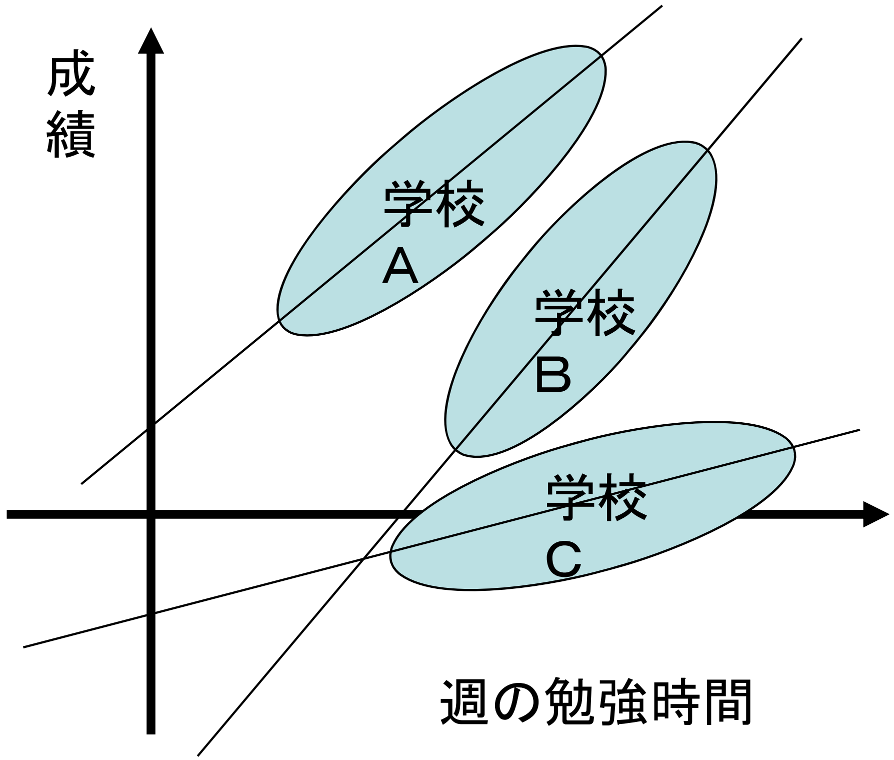
学校レベル：切片 j ＝(切片の)切片 + 誤差 $j_{切}$

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 + 誤差 $j_{傾}$

誤差j切と誤差j傾の相関は，切片jと傾きjの相関を表す。

正の場合には，勉強時間が0回の場合でも成績が良い学校ほど，勉強時間の効果が高いと解釈される。

i は生徒
j は学校
を表す。



切片や傾きを推定する

得られたデータ

成績（生徒単位）	勉強時間（生徒単位）	所属する学校ID
80	3	1
75	2.5	1
86	2.1	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
65	2	2
75	3	2
85	1.6	2
.	.	.
.	.	.
.	.	.

推定

切片・傾き

切片	傾き
60	1.2
60	1.2
60	1.2
.	.
.	.
.	.
56	1.4
56	1.4
56	1.4
.	.
.	.
.	.

切片や傾きが異なる理由を探る

- 切片や傾きが異なる理由
  - クラスの平均人数が学校間で異なるから
  - 学校種（私立・国公立）の違いによる
  - 生活習慣指導を行う程度が学校間で異なるから

- マルチレベルモデリングでは，上記のような学校レベルの変数を独立変数として，切片や傾きの学校間変動を説明することが可能

切片や傾きに対する回帰分析

推定された

切片・傾き

得られたデータ

勉強時間(学校平均)	クラスの平均人数(学校単位)	学校ID
2.1	30	1
2.1	30	1
2.1	30	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
1.9	32	2
1.9	32	2
1.9	32	2
.	.	.
.	.	.
.	.	.

回帰分析

切片	傾き
60	1.2
60	1.2
60	1.2
.	.
.	.
.	.
56	1.4
56	1.4
56	1.4
.	.
.	.
.	.

独立変数

従属変数

マルチレベルモデリングの利点

- 変数間の関係を，１次抽出単位内（学校内，生徒間）の違いと1次抽出単位間（学校間）の違いに分解し，データに対して適切な分析を行う
- 学校間の違いを従属変数として，学校レベルの変数を独立変数とした回帰分析を行うことが可能

ランダム切片＋ランダム傾きモデル

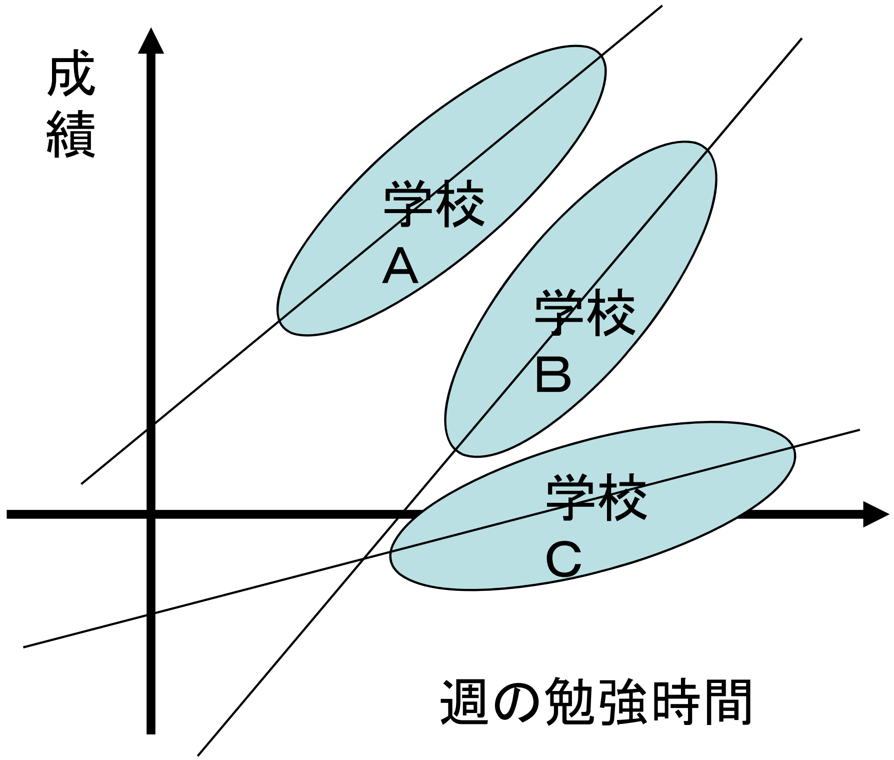
生徒レベル：成績 ij ＝切片 j ＋ 傾き j ＊勉強時間＋ 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝(切片の)切片 ＋ 誤差 $j_{切}$

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 ＋ 誤差 $j_{傾}$

誤差j切と誤差j傾の相関は，切片jと傾きjの相関を表す。

正の場合には，勉強時間が0回の場合でも成績が良い学校ほど，勉強時間の効果が高いと解釈される。



マルチレベルモデリングの仕組み

学校レベルの変数は投入しない場合

通常の回帰分析

- 成績ｉ＝切片＋傾き×勉強時間ｉ＋誤差ｉ
- iは生徒を表す。
- 通常の回帰分析（単回帰分析，重回帰分析も含む）では，切片と傾きは単一の値しかとらない。
- 従って，切片や傾きが学校間で異なるような散布図に対しては通常の回帰分析は適切な分析方法ではない。

ランダム切片モデル
（一要因の分散分析と同等）

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 誤差 ij

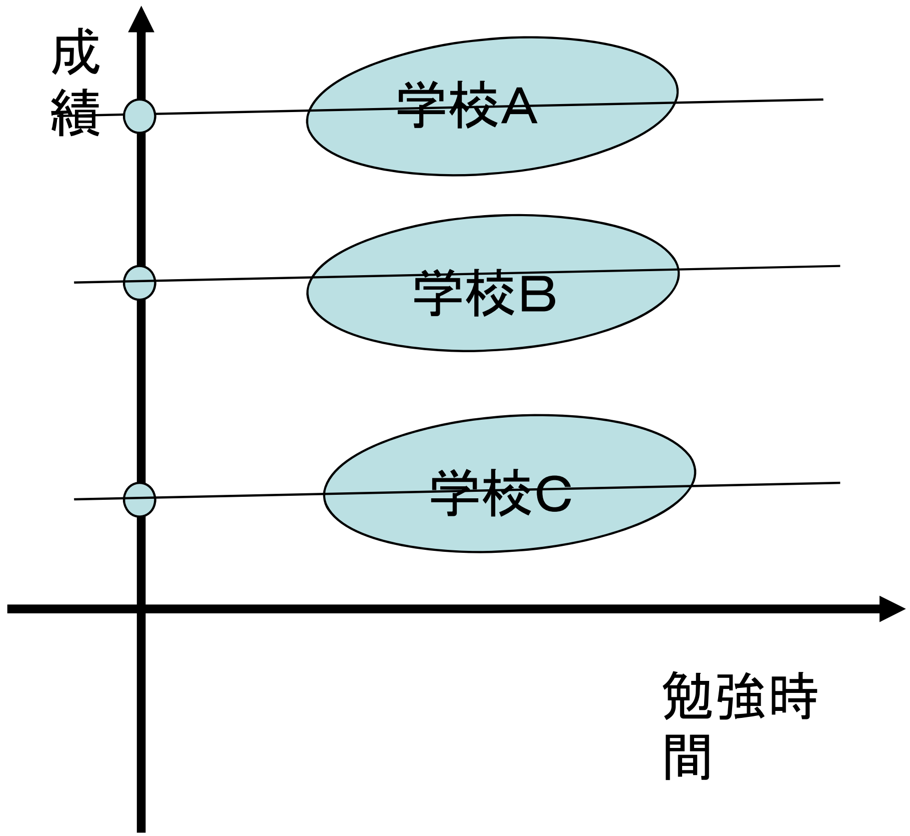
学校レベル： 切片 j ＝(切片の)切片 + 誤差 j

i：生徒

j：学校

生徒レベルの方程式：学校jの生徒iの成績ijは，学校間で異なる切片jと学校の切片jからの各生徒の成績の乖離を表す誤差ijで説明される

学校レベルの方程式：学校間で異なる切片jは，それらの平均である切片と平均的な切片からの各学校の乖離を表す誤差jで説明される



２つの誤差分散

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 誤差 ij

学校レベル： 切片 j ＝切片 + 誤差 j

誤差ijの分散＝成績の学校内変動（生徒間変動）

誤差jの分散＝成績の学校間変動

ここから，成績は学校内変動と学校間変動のどちらが大きいのかを知ることが可能

このように，マルチレベル分析では，分散を様々な要因に分解して捉えることも可能とする（詳しくは後述）

級内相関

級内相関＝級間分散/（級間分散＋級内分散）

＝学校間分散/（学校間分散＋学校内分散）

級内相関は，学校内での生徒の類似度を表す。

級内相関は級内分散が小さいときに大きくなる。

級内分散が小さいときは，学校内の生徒の類似度が高いとき

級内相関が高いときは，学校間の違いが大きいということなので，マルチレベル分析を行う意義は大きい

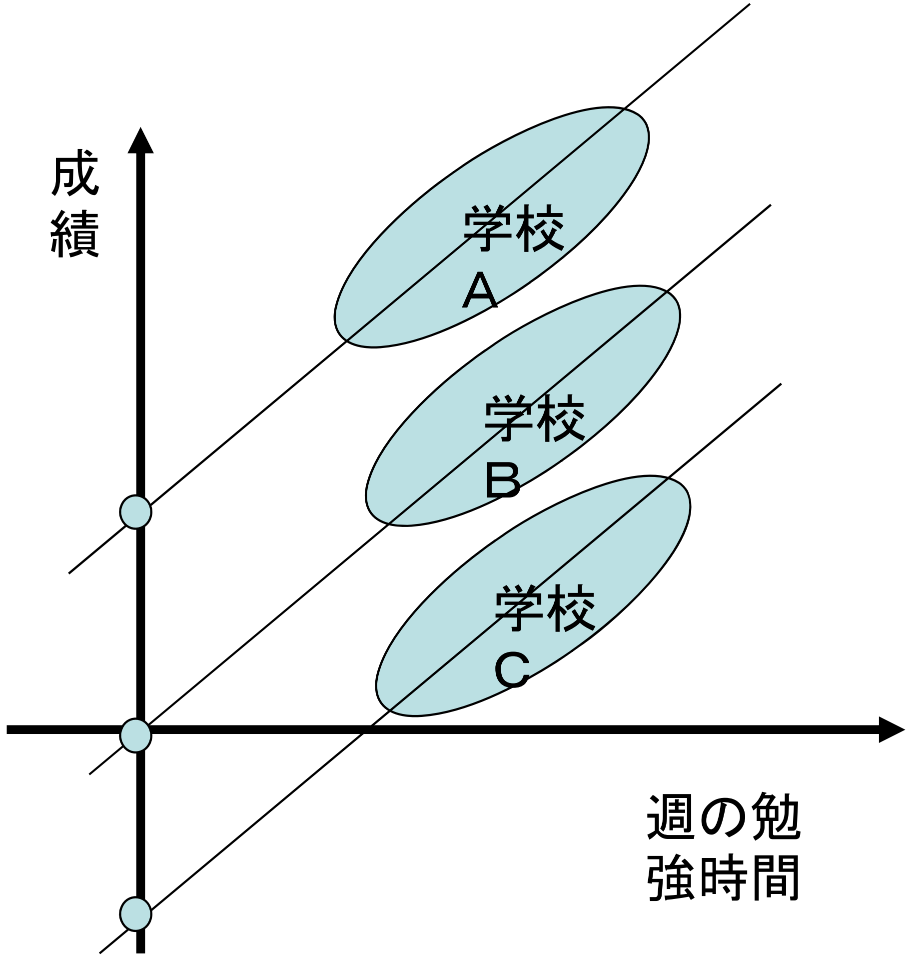
Design effect

1 + (生徒数の平均 - 1)*級内相関 > 2

ランダム切片＋傾きモデル
（共分散分析と同等）

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き＊勉強時間 ij + 誤差 ij
学校レベル： 切片 j ＝切片 + 誤差 j

生徒レベルの方程式に，勉強時間の影響が加わった

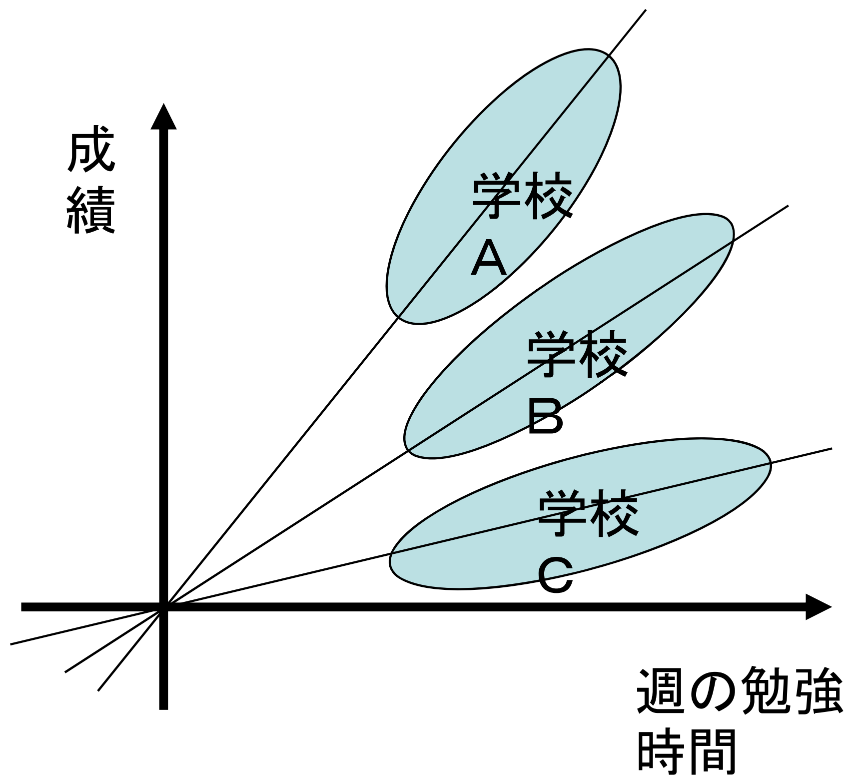


ランダム傾きモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 ＋ 傾き j ＊勉強時間 ij ＋ 誤差 ij

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 ＋ 誤差 j

（傾きの）切片が正ならば，平均的にはどの学校でも週の勉強時間を増やせば成績は良くなる。



ランダム切片＋ランダム傾きモデル

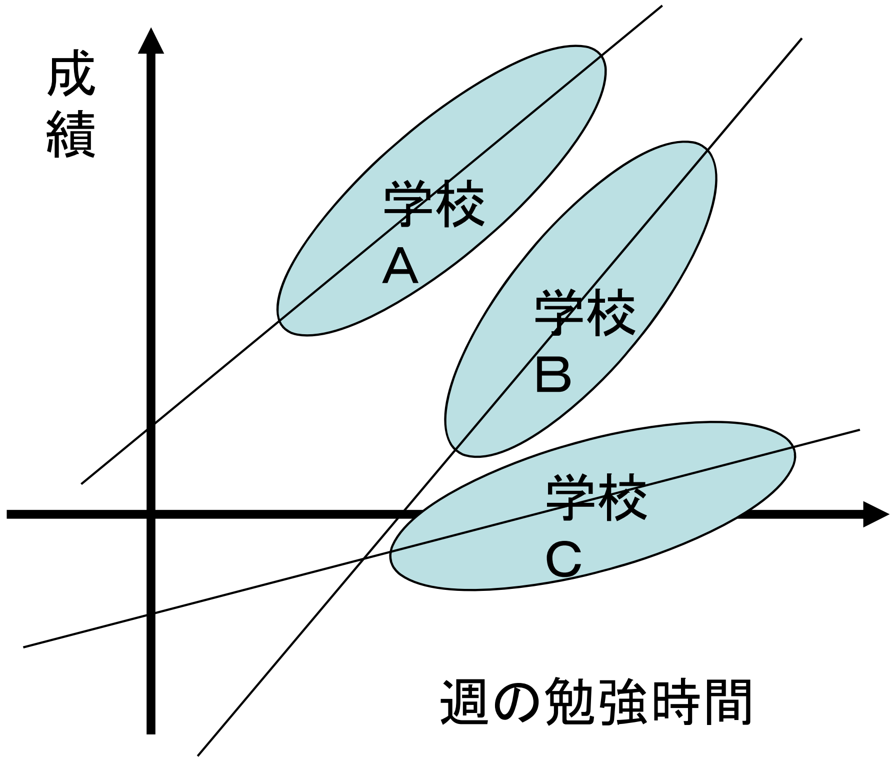
生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j＊勉強時間+ 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝(切片の)切片 + 誤差 $j_{切}$

学校レベル：傾き j ＝(傾きの)切片 + 誤差 $j_{傾}$

誤差j切と誤差j傾の相関は，切片jと傾きjの相関を表す。

正の場合には，勉強時間が0回の場合でも成績が良い学校ほど，勉強時間の効果が高いと解釈される。



誤差 j切・誤差j傾の分散

「誤差j切の分散＝0」を帰無仮説として検定を行えば,

週の勉強時間＝0の場合の, 各学校の成績の違いは有意であるのか否かが判断される

「誤差j傾の分散＝0」を帰無仮説として検定を行えば,

週の勉強時間が成績に与える影響は各学校で有意に異なるのか否かが判断される

マルチレベルモデリングの仕組み

学校レベルの変数を投入する場合

学校レベルの変数を投入する

- 学校レベルの変数
  – クラスの平均人数
  – 学校種（私立・国公立）
  – 生活習慣指導を行う程度

- ランダム切片（学校間で異なる切片）やランダム傾き（学校間で異なる傾き）を学校レベルの変数で説明することで，切片や傾きの変動の理由を探ることが可能になる

学校レベルの回帰分析

クラスの平均人数

学校A	30
学校B	40
学校C	28
・	・
・	・
・	・
学校N	32

ランダム切片 or
ランダム傾き

学校A	0.4
学校B	0.3
学校C	-0.1
・	・
・	・
・	・
学校N	0.2

分析結果から，平均人数が多いほど成績の切片が高くなるor低くなる程度や，成績に与える勉強時間の影響が強くなるor弱くなる程度が推定される

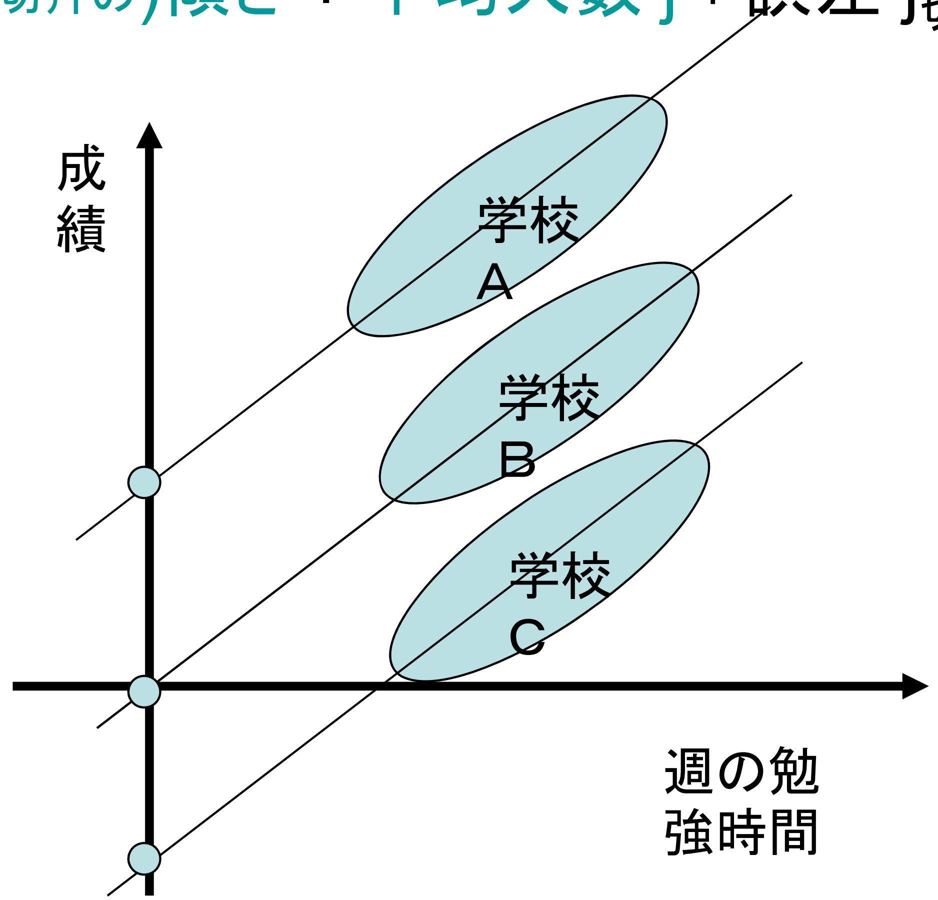
⇒（ランダム傾きに対する分析は）交互作用をみている

ランダム切片＋傾きモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き＊勉強時間 ij + 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝ (切片の)切片+(切片の)傾き＊平均人数 j + 誤差 j切

切片の傾きが正の場合には，平均人数が多いほど，週の勉強時間が0時間の場合の成績が高い傾向があると解釈される

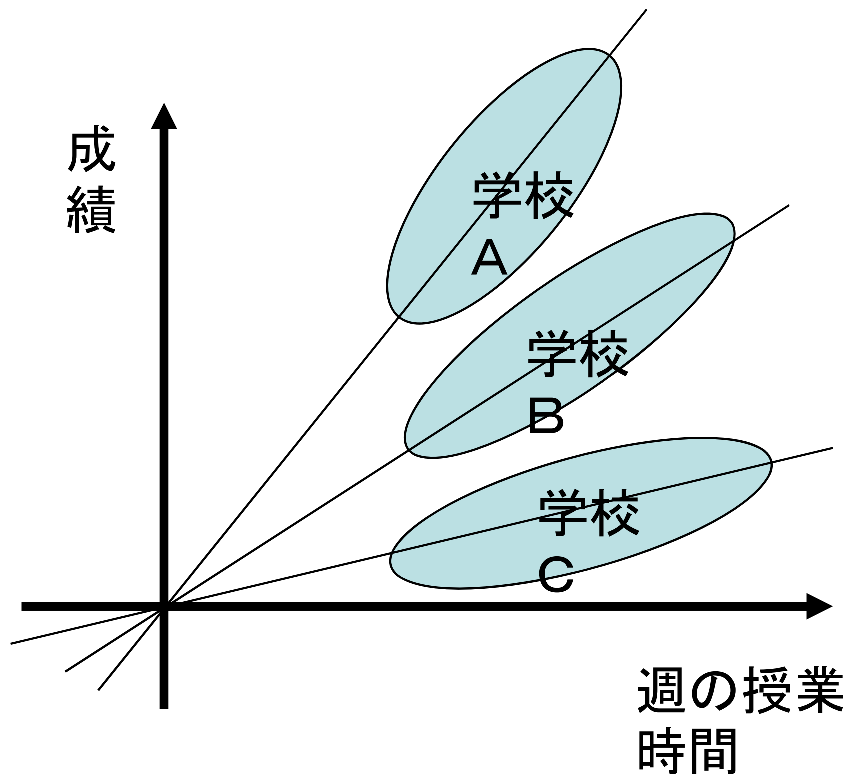


ランダム傾きモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 ＋ 傾き j ＊ 勉強時間 ij ＋ 誤差 ij

学校レベル：傾き j ＝ (傾きの)切片＋(傾きの)傾き ＊ 平均人数 j ＋ 誤差 j 傾

傾きの傾きが負の場合には，平均人数が少ないほど，勉強時間の効果があると解釈される



ランダム切片＋ランダム傾きモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j * 勉強時間 ij + 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝ (切片の)切片+(切片の)傾き * 平均人数 j + 誤差 $j_{切}$

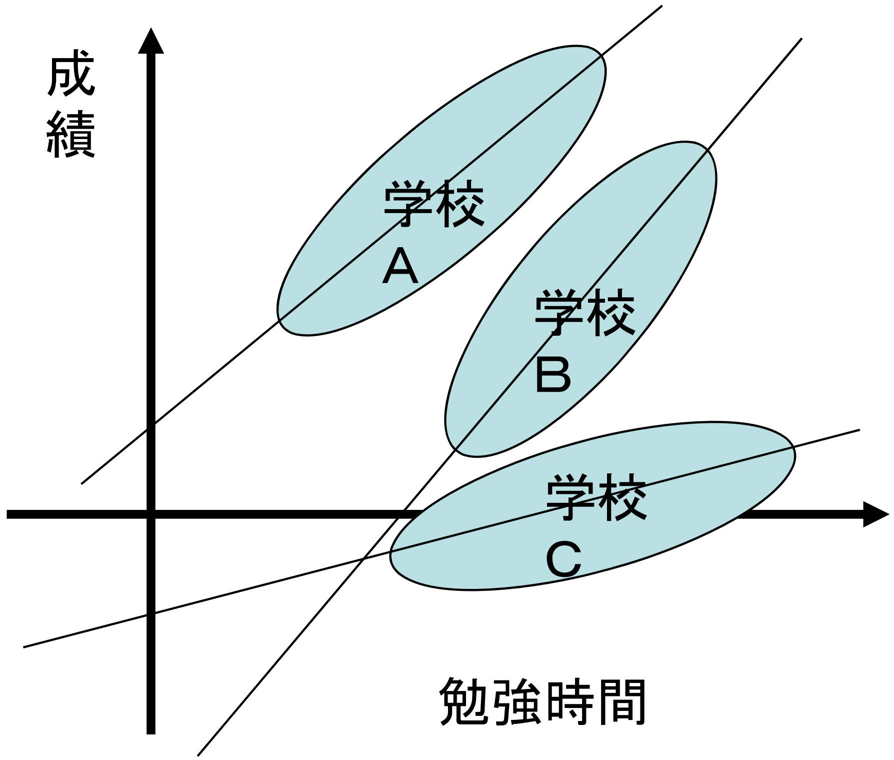
学校レベル：傾き j ＝ (傾きの)切片+(傾きの)傾き * 平均人数 j + 誤差 $j_{傾}$

切片の傾きが正の場合は，平均人数が多いほど，成績が高い傾向があると解釈される

傾きの傾きが負の場合は，平均人数が少ないほど，勉強時間の効果があると解釈される

誤差j切と誤差j傾の相関は，平均人数の影響を取り除いたときの（統制した場合の）切片jと傾きjの相関を表す。

正の場合には，平均人数が同じ学校同士を比較した場合，勉強時間が0回の場合でも成績が良い学校ほど，勉強時間の効果が高いと解釈される。



２段階の推定でも良いのでは？

- １）学校ごとに回帰分析を行い，２）学校ごとに推定された切片と傾きに対して，学校レベルの独立変数で説明を行えば良いのでは？
- 切片や傾きは推定値であり，サンプル数の少ない学校に関しては，推定値が不確かである（標準誤差が大きい）。しかし，2段階推定ではこれが考慮されない。
- 生徒レベルの成績の分散が推定されない。
  - 従って，学校内・間の違いを調べることができない

分散の分割

2段抽出モデルのフルモデル

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j＊勉強時間 j + 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝ (切片の)切片 + (切片の)傾き ＊ 平均人数 j + 誤差 j
切

学校レベル：傾き j ＝ (傾きの)切片 + (傾きの)傾き ＊ 平均人数 j + 誤差 j
傾

上のモデルから，

・学校レベルの切片に対する平均人数の影響を0とする

・学校レベルの傾きに対する平均人数の影響を0とする

など様々な下位モデルが考えられる

モデル間で誤差分散の変化を比較することで，生徒レベル・学校レベルにおける独立変数の影響を調べることが可能となる

例①

モデル1

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 誤差 ij

学校レベル： 切片 j ＝ (切片の)切片 + 誤差 j

誤差ijの分散＝成績の学校内変動（生徒間変動）
誤差jの分散＝成績の学校間変動
ここから，成績は学校内変動と学校間変動のどちらが大きいのかを知ることが可能
学校間変動/(学校間変動＋学校内変動)＝級内相関

注：これはモデル間の比較ではありません

例②

モデル2

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 誤差 ij

学校レベル：切片 j ＝ (切片の)切片 + (切片の)傾き＊平均人数 j + 誤差 j

誤差ijの分散＝成績の学校内変動（生徒間変動）
誤差jの分散＝平均人数の影響を取り除いた後の，成績の学校間変動
学校間変動/(学校間変動＋学校内変動)＝条件付き級内相関
⇒同じ平均人数の学校における，生徒間の成績の類似度

注：これもモデル間の比較ではありません

例③

モデル1

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 誤差 ij

モデル3

生徒レベル：成績 ij ＝切片 j + 傾き j ＊ 勉強時間 ij + 誤差 ij

モデル1の誤差ijの分散は，生徒レベルの成績の分散，

モデル2の誤差ijの分散は，勉強時間の影響を取り除いた後の，生徒レベルの成績の分散である。

従って，誤差ijの分散の違い（モデル1＞モデル3）は，生徒レベルにおいて勉強時間が成績に与える影響として解釈される。

「平均勉強時間」を変数として用いる

- 学校ごとの「平均勉強時間」
- 学校レベルの変数
- 生徒レベルの勉強時間は，勉強時間に関する生徒レベルの議論に使われる。
- 学校レベルの勉強時間は，勉強時間に関する学校レベルの議論に使われる。

例④

モデル4

学校レベル:傾き j ＝(傾きの)切片 + 誤差 j

モデル5

学校レベル:傾き j ＝(傾きの)切片 + (傾きの)傾き * 勉強時間の学校平均 j + 誤差 j

モデル4の誤差jの分散は，学校レベルの傾きjの分散，

モデル5の誤差jの分散は，勉強時間の影響を取り除いた後の，学校レベルの傾きjの分散である。

従って，誤差jの分散の違い（モデル4＞モデル5）は，生徒レベルの勉強時間が成績に与える影響が，学校レベルの勉強時間によって変動する程度として解釈される。

学校全体として勉強時間が長い学校の生徒ほど，勉強時間が成績に与える影響が大きい・小さい

例⑤

モデル1

学校レベル： 切片 j ＝ (切片の)切片 + 誤差 j

モデル2

学校レベル：切片 j ＝ (切片の)切片 + (切片の)傾き＊平均人数 j + 誤差 j

モデル1の誤差jの分散は，学校レベルの切片の分散，

モデル2の誤差jの分散は，平均人数の影響を取り除いた後の，学校レベルの切片の分散である。

従って，誤差jの分散の違い（モデル1＞モデル2）は，成績の切片の学校間分散のうち，平均人数の違いで説明される部分として解釈される。

縦断データに対する適用

縦断データに対する適用

- 変化を調べるためには，縦断データが必要
- 学校から複数の生徒が選ばれるという関係を，個人が複数の測定時点で測定されるという関係とみなす。
- データ収集時点が，個人ごとに異なっていても，その情報を反映した分析が可能
- 変化を直線あるいは曲線で個人ごとに記述し，直線・曲線を規定するパラメタを個人単位の変数で説明する

モデル

測定時点レベル：成績 ti ＝切片 i＋ 傾き i＊ 測定時点 ti ＋ 誤差 ti

個人レベル：切片 i ＝ (切片の)切片＋(切片の)傾き ＊ 勉強時間 i ＋ 誤差 $j_{切}$

個人レベル：傾き i ＝ (傾きの)切片＋(傾きの)傾き ＊ 勉強時間 i ＋ 誤差 $i_{傾}$

i：個人

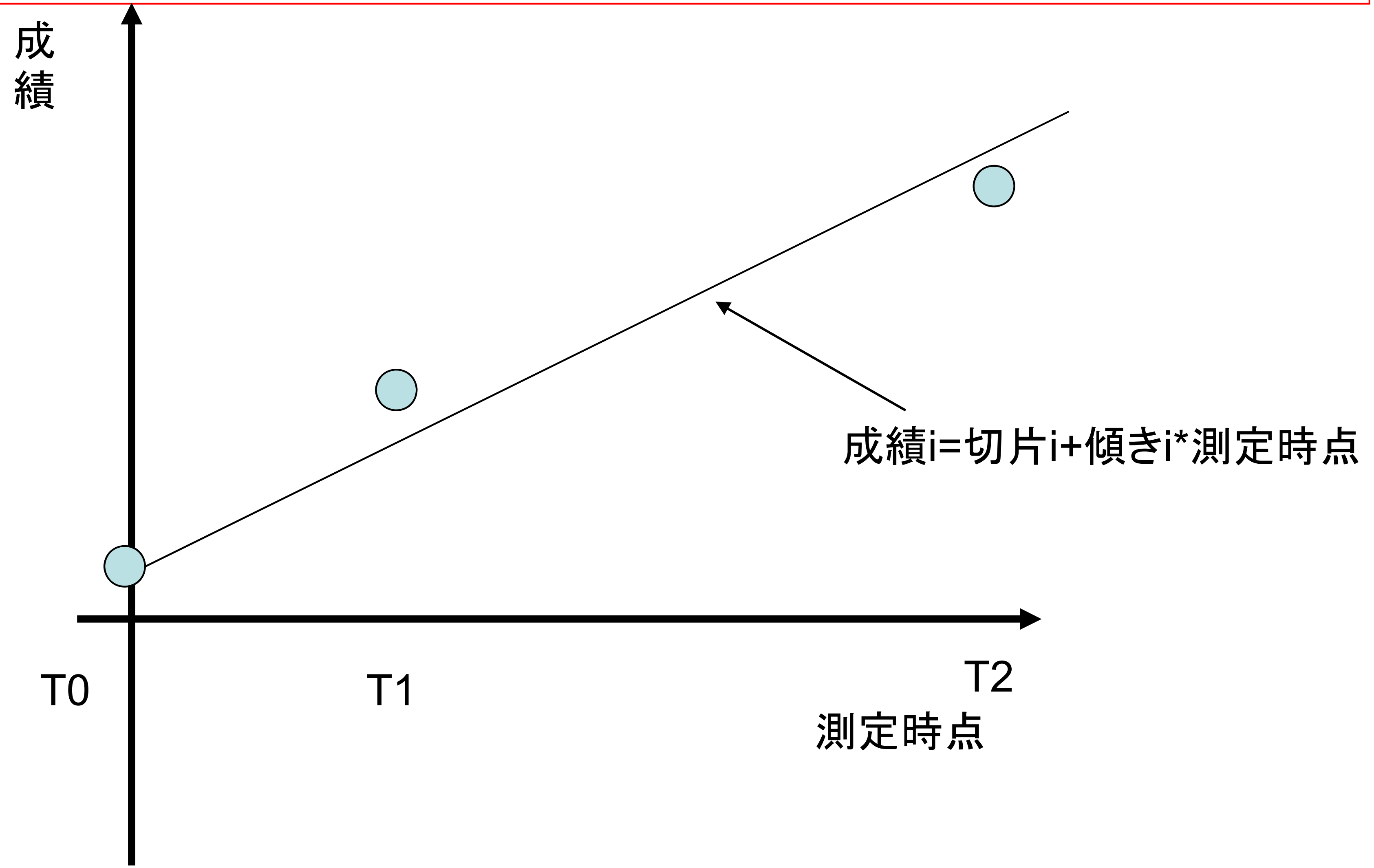
t：測定時点

個人iの時点tにおける測定時点tiを独立変数として用いているために，時点tにおける測定時点tiが個人ごとに異なっていることを適切に反映した分析が可能

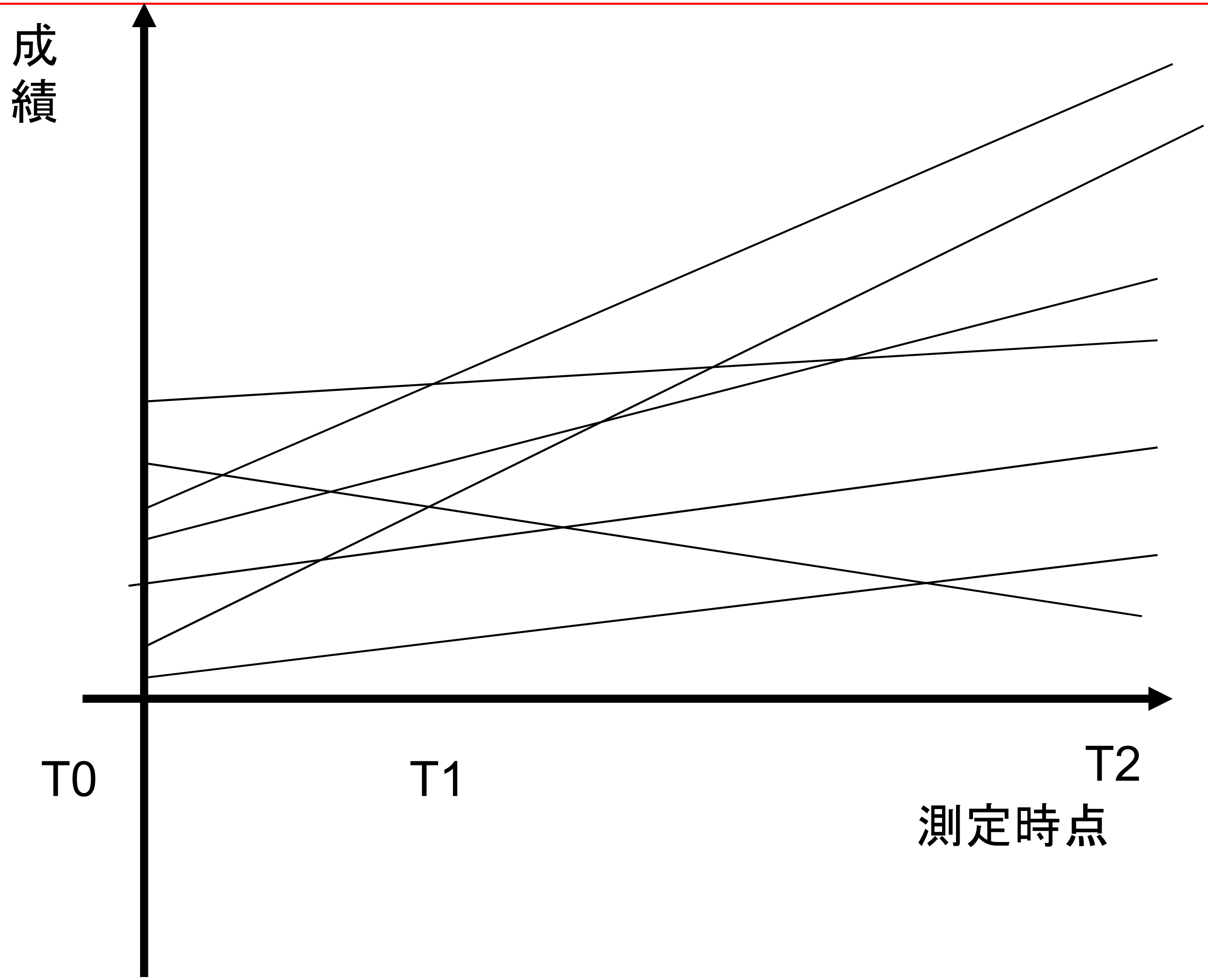
個人レベルの分析では，測定時点の影響を排除した上で，勉強時間が成績の切片（測定時点0における成績）や傾き（測定時点の1単位の増分による成績アップの程度）に与える影響を調べることが可能

この場合，成績は項目反応モデルなどで評価されている必要がある

個人の変化（直線で表現）



個人ごとの変化の違い



変化を切片と傾きの違いとして縮約的に記述する

2次曲線モデル

測定時点レベル: 成績 ti ＝切片 i + 傾き i＊測定時点 ti + 2次の係数 i ＊測定時点ti^2+誤差 ti

個人レベル: 切片 i ＝ (切片の)切片+(切片の)傾き＊勉強時間 i + 誤差 $j_{切}$

個人レベル: 傾き i ＝ (傾きの)切片+(傾きの)傾き＊勉強時間 i + 誤差 i $_{傾}$

個人レベル: 2次の係数 i ＝ (2次の)切片+(2次の)傾き＊勉強時間 i + 誤差 i 2次

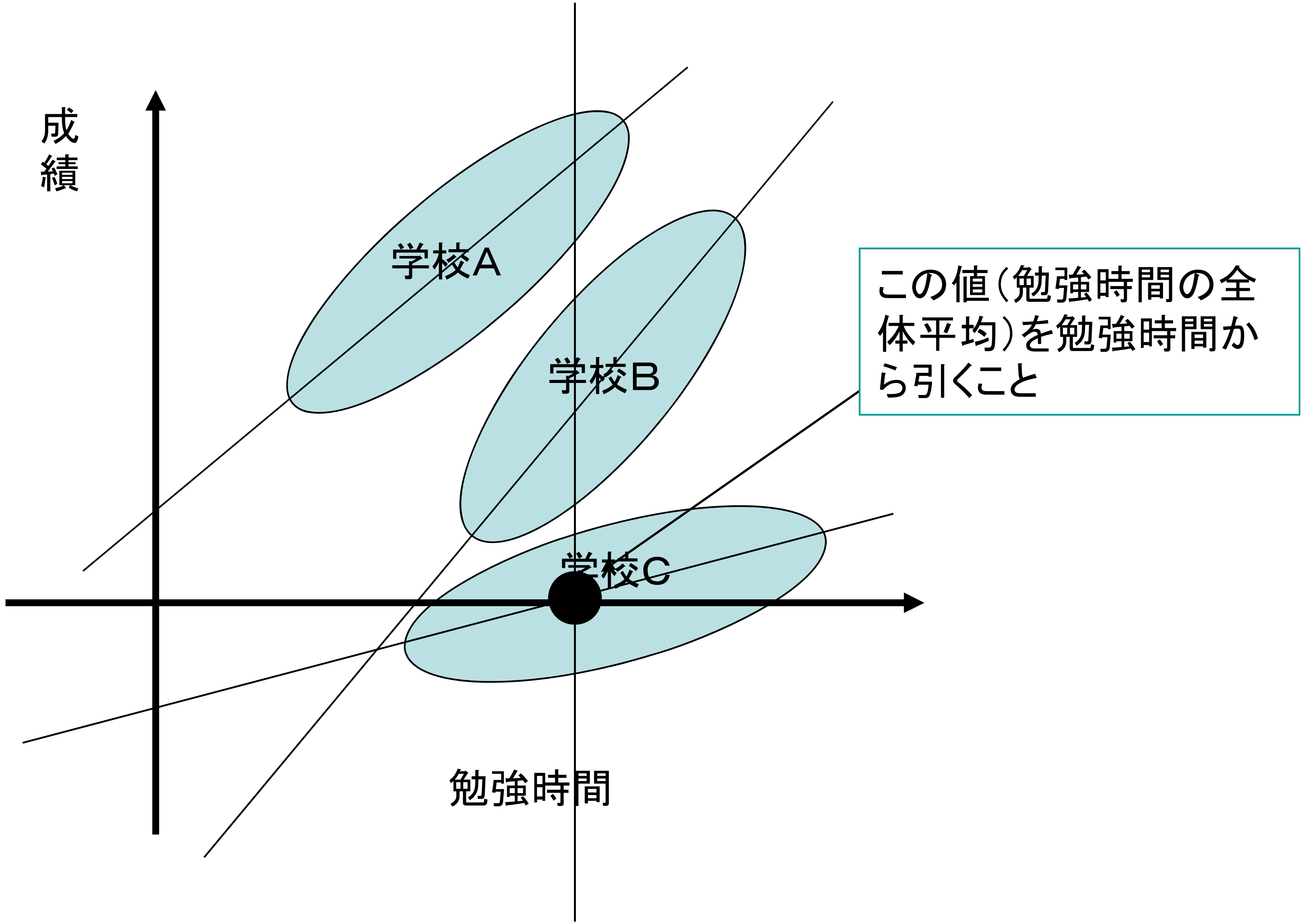
2次の係数 iに対する分析からは，なぜ変化の仕方が変化するのかという理由を探ることが可能

中心化(Centering)

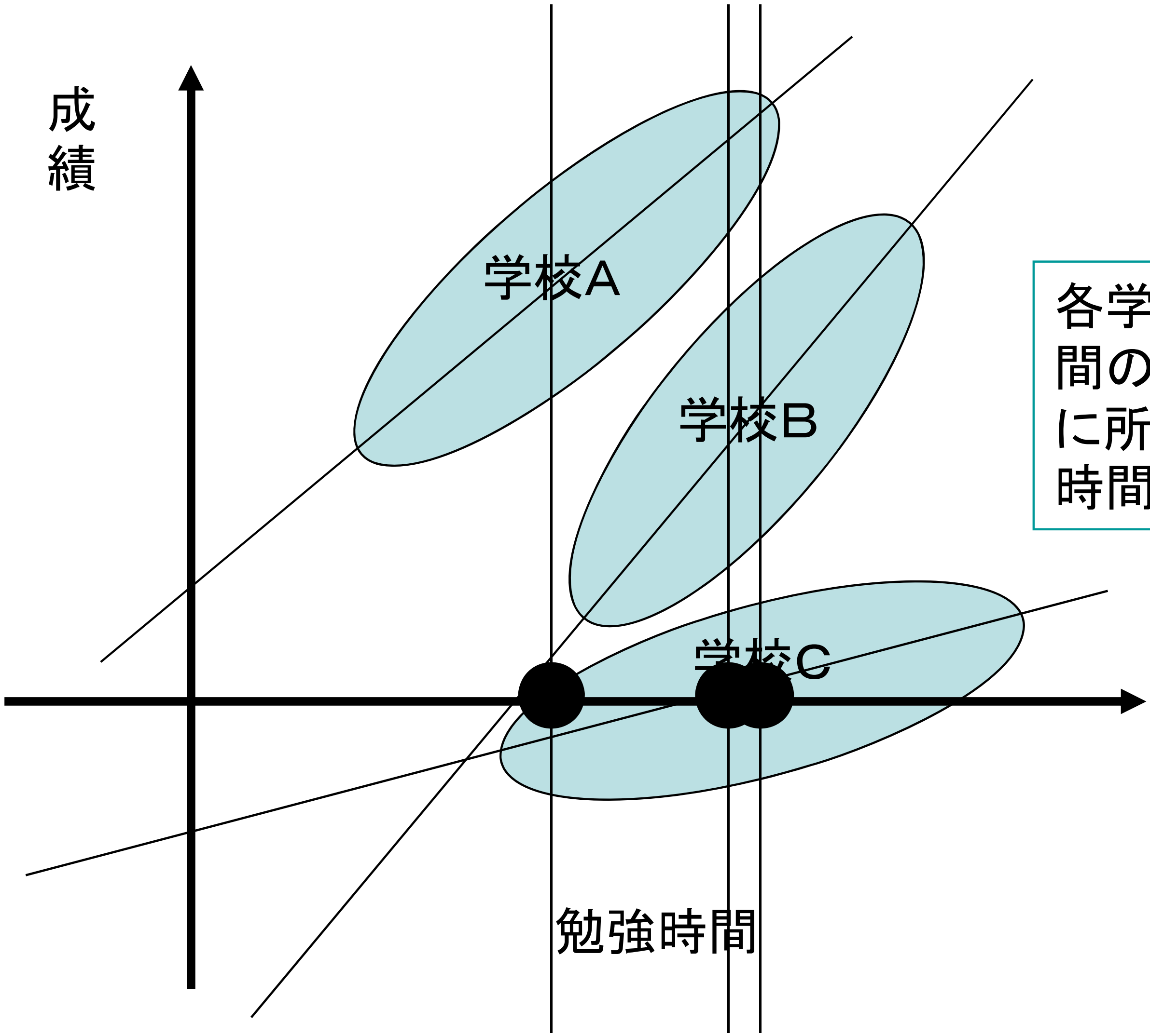
中心化

- 平均偏差化された独立変数を分析に用いること
- 中心化を行う理由
  - 切片 jの解釈が現実的なものになる
  - ランダム切片とランダム傾きの相関が高くなり過ぎることを避けるため

全体平均で中心化



グループ平均で中心化



各学校における勉強時間の平均を，その学校に所属する生徒の勉強時間から引くこと

切片 j の解釈

- 平均を引かないとき：学校 j において，勉強時間が0時間の生徒の成績の期待値
- 全体平均を引くとき：学校jにおいて，勉強時間が全体平均と同じ生徒の成績の期待値
- 学校平均を引くとき：学校 j における成績の平均

学校平均を引く場合

- 生徒レベルの方程式において，勉強時間から勉強時間の学校平均 j を引いた場合には，学校間の勉強時間の違いが情報として残らなくなる。
- その場合には，勉強時間の学校平均 j を学校レベルの独立変数として投入すべき。

ソフトウェア

ソフトウェア

- HLM：順序カテゴリカル・名義変数・計数データが従属変数の場合でも分析可
  - http://www.ssicentral.com/hlm/
  - FreeのStudent versionのダウンロードも可
  - 15日間のTrial versionのダウンロードも可
- Mlwin：順序カテゴリカル・名義変数が従属変数の場合でも分析可，Multiple membershipのデータでも分析可能（1人が2つ以上の学校に所属する）
  - http://www.cmm.bristol.ac.uk/MLwiN/index.shtml
  - 30日間のTrial versionのダウンロードも可
- R (パッケージ nlme)
- SPSS (SPSS Advanced Models)
  - 小野寺・岩田・菱村・長谷川・村山 (編訳) (I.Kreft and J.de Leeuw著)基礎から学ぶマルチレベルモデル ナカニシヤ出版

ソフトウェア

- SAS (proc mixed)
  - 清水裕士　2006　ペア･集団データにおける階層性の分析, 対人社会心理学研究, 6, 89-99.
  - 松山裕･山口拓洋(編訳) (G.Verbeke and G. Molenberghs編) (2001). 医学統計のための線形混合モデル -SASによるアプローチ- サイエンティスト社
- Mplus (構造方程式モデリング用のソフトウェア)
  - http://www.statmodel.com/
  - http://www010.upp.so-net.ne.jp/koken/
  - 尾崎幸謙 (2007) 豊田秀樹(編著) 共分散構造分析[AMOS編], 東京図書「第14章 Mplus」

Mplusによるマルチレベルモデル

Mplusを使用する利点

- 従属変数がカテゴリカル順序変数・計数データであっても分析可能
- 従属変数が複数であっても分析可能（パス解析, 萩原・大内 2006）
- 潜在構造分析を適用することが可能
- Version 5ではマルチレベル探索的因子分析も可能となった

構造方程式モデリングの原理

モデルから作られる共分散行列とデータから計算される共分散行列の差を最小にするようなパラメタを推定する。

単回帰モデルの場合には，以下のようなモデルから作られる共分散行列が構成される

$$y = a \times x + e$$

a:回帰係数，σ_x^2:xの分散，σ_e^2:eの分散

$$\text{モデルの共分散行列} = \begin{bmatrix} a^2 \times \sigma_x^2 + \sigma_e^2 & a \times \sigma_x^2 \\ a \times \sigma_x^2 & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{データから計算される標本共分散行列} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

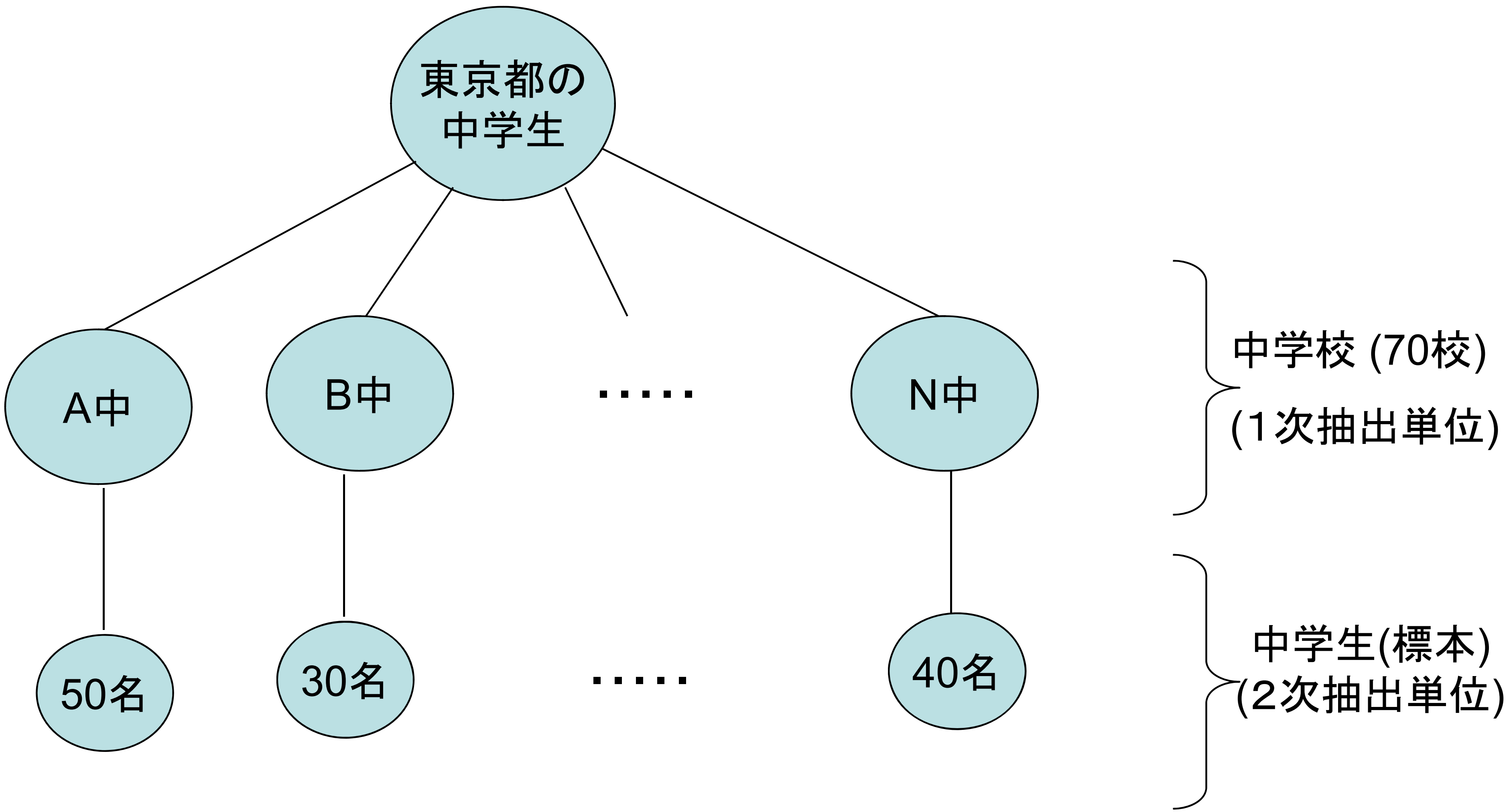
マルチレベルSEMの原理

- １次抽出単位内･間それぞれでモデルを構築する。
  - １次抽出単位内･間それぞれで標本共分散行列を求める
  - １次抽出単位内･間それぞれで母数で構造化された共分散行列を求める。
  - それらの差を最小にする母数を推定する

分析例（架空のデータ）

「成績」に対する「勉強時間」と教師に対する「好き嫌い」の影響は，「クラス人数」によって変化するだろうか？

2段抽出



データ

y(成績)	x1(時間)	x2(好き嫌い)	w(クラス人数)ークラス人数の全体平均	clus(学校)
0.832	2	2	0.939	1
-0.468	1	2	0.939	1
2.714	4	6	0.939	1
-1.063	1	3	-1.165	2
-0.752	3	3	-1.165	2
-0.826	1	5	-1.165	2
1.685	2	4	-1.165	2
-0.454	3	1	-1.165	2
0.185	4	3	-1.165	2
0.08	1	3	-1.165	2
-0.435	2	2	-1.165	2
-2.587	1	6	-1.165	2
-2.613	3	1	-0.944	3
-1.385	1	4	-0.944	3
0.382	4	3	-0.944	3

2段抽出モデル

2段抽出モデルの分析から，何が分かるか？

切片・パス係数を1つの値ではなく，1次抽出単位間で値がバラつく変数（因子）として捉えることで

→1次抽出単位間の切片・傾きの分散が分かる(ブランド間の切片・パス係数の分散→ブランド間で切片・パス係数がどれくらいバラつくのか)

→ 1次抽出単位間で異なる切片・傾きに対して(パス解析・因子分析・潜在構造分析などの)分析を行うことが可能

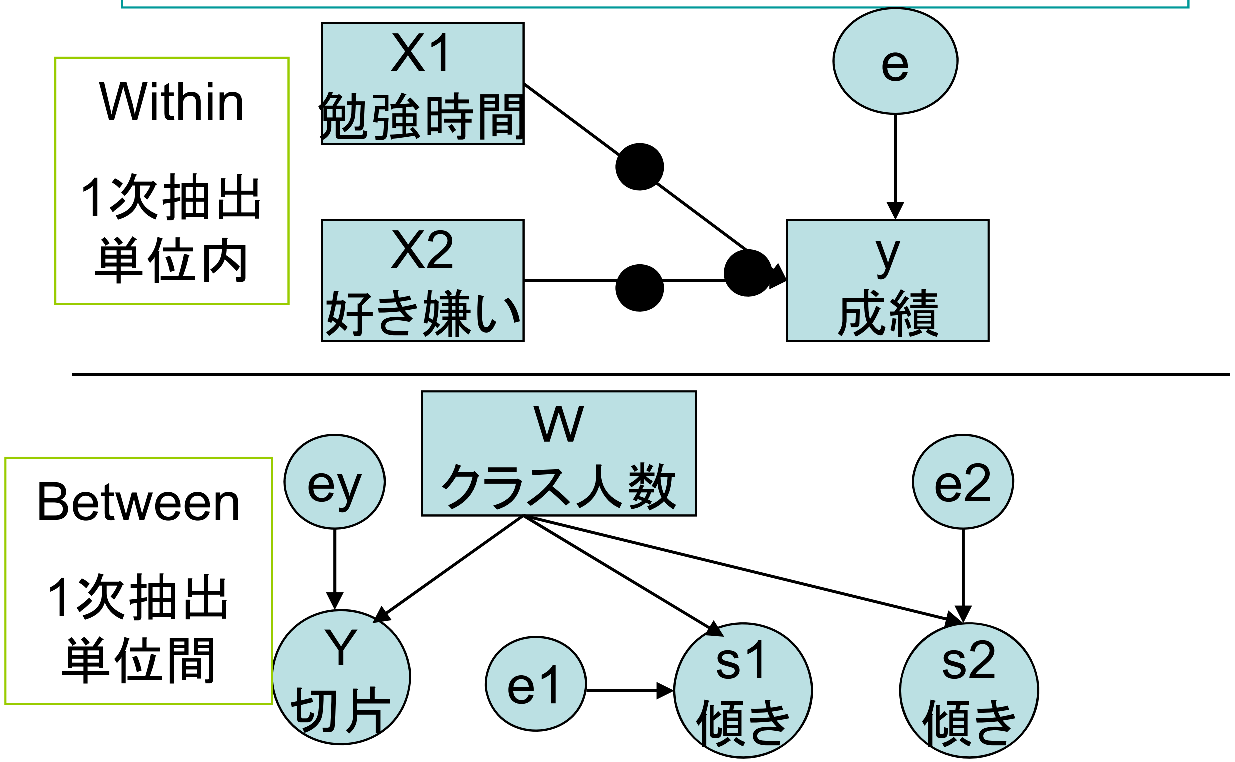
データは，

生徒レベルでは

勉強時間(x1)・先生の好き嫌い(x2)・成績 (Y)の3変数

学校レベルでは

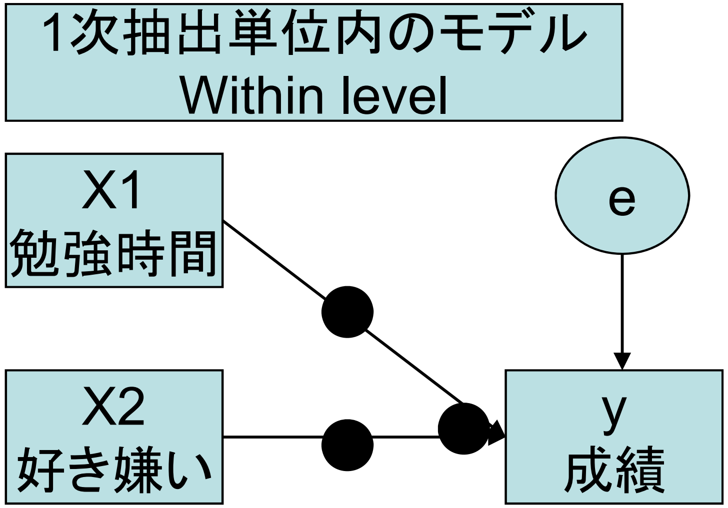
クラスの平均人数(w)の1変数



モデルの構成

- ２段抽出モデルでは，分散共分散行列を1次抽出単位内の分散共分散行列と1次抽出単位間の分散共分散行列に分けて分析を行う。
- 1次抽出単位内と1次抽出単位間それぞれでモデルを構成する。
- 1次抽出単位内の構造と，１次抽出単位間の構造を検討することが可能

1次抽出単位内のモデル



成績=μ_b+α_{1b}×勉強時間+α_{2b}×好き嫌い+e

μ_b, α_{1b}, α_{2b} は b(1次抽出単位，学校)ごとに値が異なる切片・回帰係数

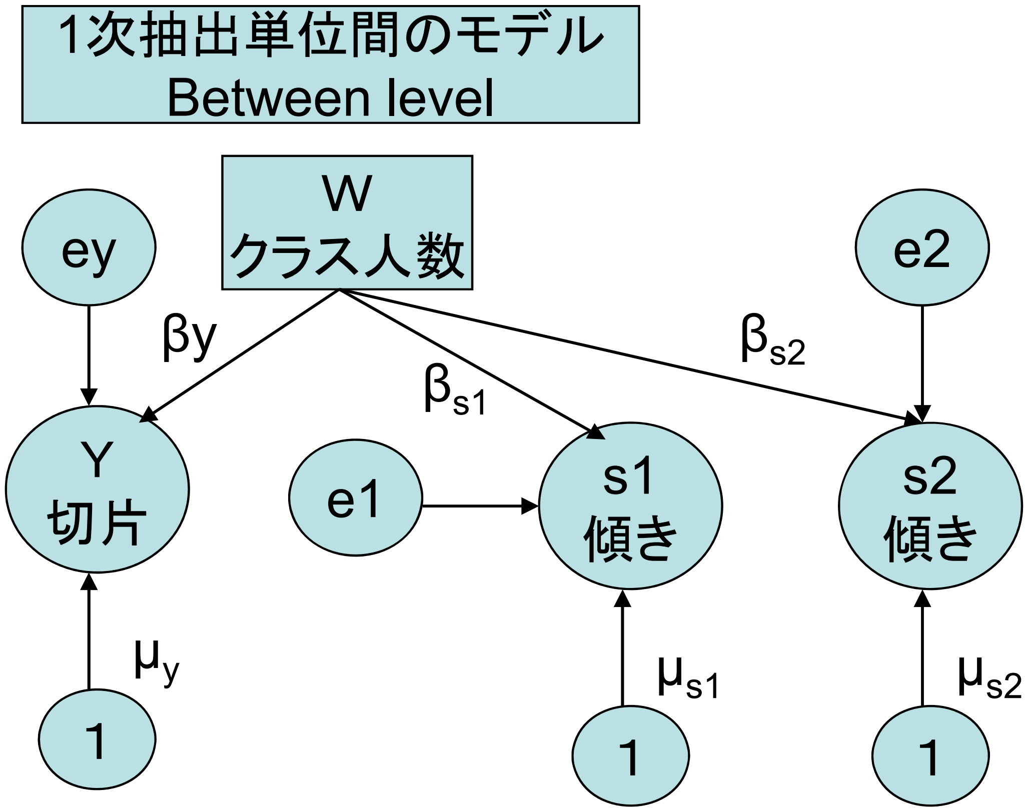
μ_b, α_{1b}, α_{2b} は1次抽出単位間の分析で因子として扱われる。

1次抽出単位間の分析ではμ_b, α_{1b}, α_{2b} を変数としてモデルに組み込むことが可能。

見た目は，成績を勉強時間と先生の好き嫌いで説明する重回帰分析

●はランダムな係数を表す。ここでは，成績の切片と2つの回帰係数がランダムになる。ランダムな係数とは，値が1次抽出単位(学校)ごとに異なる係数のこと

1次抽出単位間のモデル



因子として表現されるy, s1, s2をwが説明している。

クラスの平均人数の大小によって，切片が異なるか

クラスの平均人数の大小によって，勉強時間が成績に与える影響が異なるか

クラスの平均人数の大小によって，好き嫌いが成績に与える影響が異なるか

$y(\mu_b) = \mu_y + \beta_y \times w + ey$

$S1(\alpha_{1b}) = \mu_{s1} + \beta_{s1} \times w + e1$

$S2(\alpha_{2b}) = \mu_{s2} + \beta_{s2} \times w + e2$

成績のランダム切片μ_bは y

勉強時間からのランダム回帰係数α_{1b}は s1

好き嫌いからのランダム回帰係数α_{2b}は s2

で表されている。

1次抽出単位間の変数はw

推定結果・解釈

Within Level			
Residual Variances			
Y		1.046***	e
Between Level			
S1	ON		
W		-0.827***	β_{s1}
S2	ON		
W		0.152	β_{s2}
Y	ON		
W		0.459**	βy
Intercepts			
Y		-0.004	μy
S1		0.354***	μ_{s1}
S2		0.656***	μ_{s2}
Residual Variances			
Y		0.818***	ey
S1		0.888***	e2
S2		0.006	e1

「クラス人数」が全体平均と同じ学校の場合には、「成績」の切片は-0.004, 「勉強時間」が1時間長い場合には「成績」は0.354上昇し、「好き嫌い」が1高い場合には「成績」は0.656上昇すると解釈される。

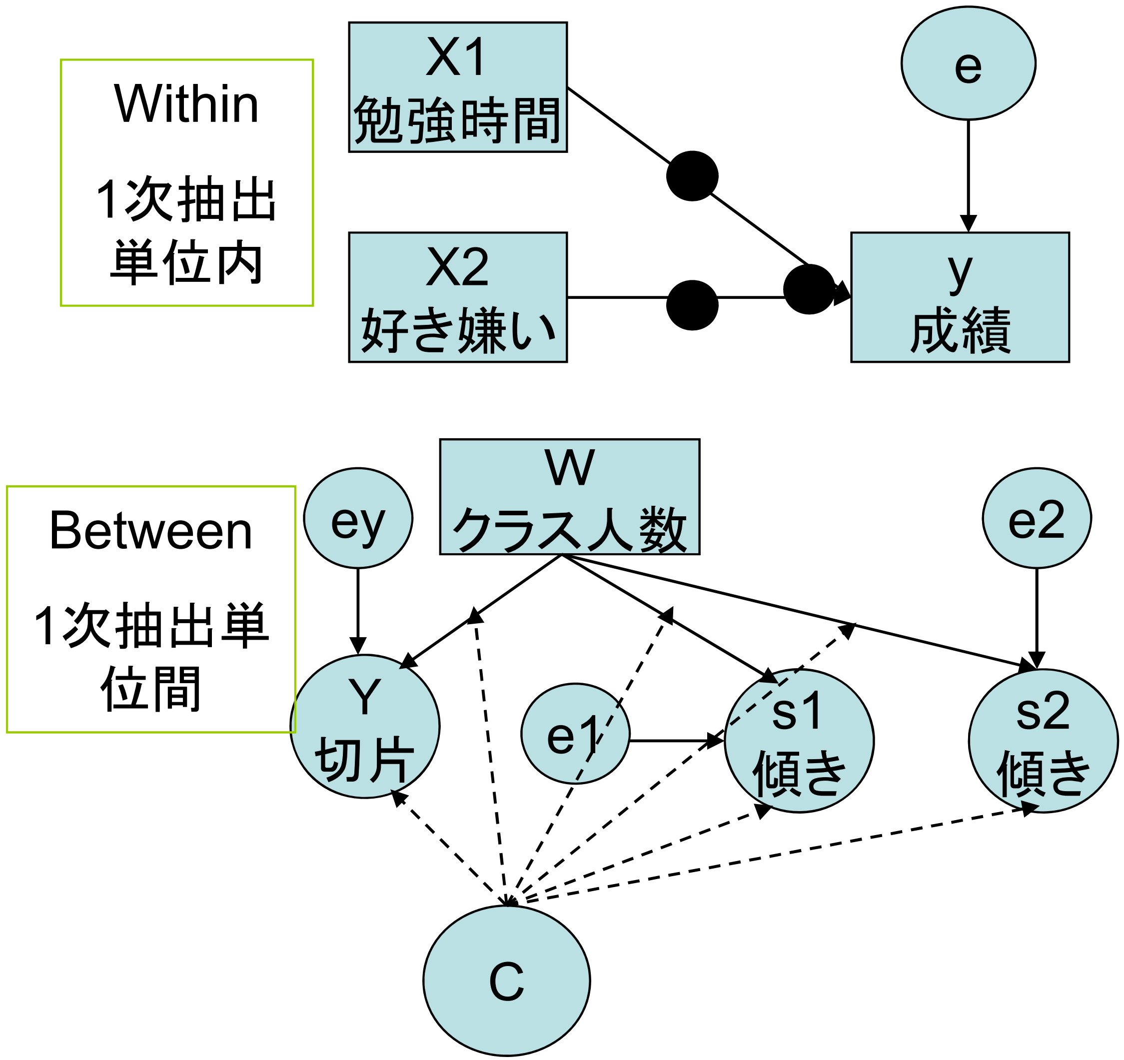
Between LevelのS1 ON Wは「勉強時間」から「成績」への回帰係数を「クラス人数」がどのように媒介するかを表す。ここでは負の値なので、「クラス人数」が少ないほど「勉強時間」から「成績」への回帰係数は大きくなると解釈されます。「好き嫌い」の効果にも「クラス人数」は正の影響があるが、有意ではなかった。

潜在構造を加味した2段抽出モデル

Between levelに対して潜在構造分析を行う。

クラス人数が傾きをよく媒介する学校群，あまり媒介しない学校群などが抽出されることが期待される。

そして，それらの群の違いを別の学校レベルの変数で説明することも可能



マルチレベル分析を行う際の注意
(Mplus Discussion内のMutheの返答から)

- １次抽出単位の大きさ
  - 少なくとも30～50以上は欲しい
- ２次抽出単位の大きさ
  - ペアデータ（カップル・夫婦・双子）を扱うことも可能なので，2でも構わない。Mplusでは1であっても，学校間の情報として用いている。

参考文献

- 小野寺・岩田・菱村・長谷川・村山 (編訳) (I.Kreft and J.de Leeuw著) (2006). 基礎から学ぶマルチレベルモデル ナカニシヤ出版

- 松山裕・山口拓洋(編訳) (G.Verbeke and G. Molenberghs編) (2001). 医学統計のための線形混合モデル -SASによるアプローチ- サイエンティスト社.

- 萩原康仁・大内善広 (2004). 通信簿の評定結果の納得感に及ぼす指導と評価に関する教師の取組みの効果, 教育心理学研究, 54, 441-452.

- Bryk, A & Raudenbush, S., (1992). Hierarchical Linear Models: Application and Data Analysis Methods, London: SAGE.

- Goldstein, H. I. (1987). Multilevel models in educational and social research. London: Oxford University Press.